

158: Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien
 $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ espace euclidien de dim. n , $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I. Adjoint d'un endomorphisme

a - Définitions et premières propriétés

Prop. / Def. 1: Il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tq $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle \forall x, y \in E$
 f^* est appelé adjoint de f .

Si (e_i) est une base orthonormée et $A = M_{(e_i)}(f)$ alors $A^* = M_{(e_i)}(f^*)$ est ${}^t A$.

Prop. 2: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) $f^{**} = f$
- (ii) $\text{Id}^* = \text{Id}$
- (iii) $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
- (iv) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- (v) $\text{rg } f^* = \text{rg } f$
- (vi) $\det f^* = \det f$

Prop. 3: $\text{Ker}(f)^\perp = \text{Im}(f^*)$ et $\text{Im}(f)^\perp = \text{Ker}(f^*)$

Prop. 4: Soit F un sev de E stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^* .

b - Vocabulaire des endomorphismes remarquables

Soit (e_i) une base orthonormée de E . On note $A = M_{(e_i)}(f)$.

Def. 5: f est dit normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$
 Matriciellement, si $A {}^t A = {}^t A A$

Def. 6: f est dit auto-adjoint (ou symétrique) si $f^* = f$
 Matriciellement, si ${}^t A = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Def. 7: f est dit orthogonal si $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in E$.
 On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.
 On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Rmq. 8: les endomorphismes auto-adjoints et orthogonaux sont normaux.

Def. 9: f est dit anti-symétrique si $f^* = -f$.
 Matriciellement, si ${}^t A = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques.

(*) **Prop.**: Les ASE :

- (i) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in E$
- (ii) $\|f(x)\| = \|x\|$
- (iii) (e_i) base orthonormée, $A = M_{(e_i)}(f)$ alors ${}^t A A = \text{Id}$.

II. Réduction des endomorphismes normaux et symétrique

a - Endomorphismes normaux

Prop. 9: Si f est normal alors $\|f(x)\| = \|f^*(x)\| \forall x \in E$.

Prop. 10: Soit f normal. Si E_λ est un sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ alors $E_\lambda^\perp$ est stable par f^* .

Prop. 11: Soit E euclidien de dimension 2 . Si f n'a pas de valeurs propres réelles. Alors pour toute base B de E orthogonale

On a :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } b \neq 0.$$

Thm. 13: Si f est normal, alors il existe une base B orthogonale tq

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ (0) & & & \begin{matrix} z_1 & \dots & z_s \end{matrix} \end{pmatrix}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $z_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b - Endomorphismes auto-adjoint

Thm. 14: (Spectral) toutes matrices symétriques réelles et diagonalisables dans $\mathbb{R}$ et les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

Cor. 15: f auto-adjoint. Alors f est diagonalisable et les sous-espaces propres de f sont 2 à 2 orthogonaux.
 En particulier, on peut construire une base orthonormée de vecteurs propres en choisissant une base orthonormée dans chaque espace propre.

Cor. 16: $A \in S_n(\mathbb{R})$. $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $A' = {}^t P A P$ sont diagonale.

Rmq. 17: Les matrices symétriques complexes non réelles ne sont pas diagonalisables.

Ese. 17: Considérer $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$

Thm. 18: (Réduction des matrices anti-symétriques) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq:

$$P^{-1}MP = P^*MP = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ (0) & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

c- Application du théorème spectral et endomorphisme défini positif.

Def. 19: f est dit symétrique (resp. définie) positif si il est symétrique et (resp. $\forall x \in E \setminus \{0\} \langle x, f(x) \rangle > 0$) $\forall x \in E \langle x, f(x) \rangle \geq 0$. On note $S^s(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) l'ensemble des endo (symétrique) pos.

Def. 20: A est dite (resp. définie) positive si elle est symétrique et (resp. $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \langle x, Ax \rangle > 0$) $\forall x \in \mathbb{R}^n \langle x, Ax \rangle \geq 0$. On note $S_n^s(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices (resp. définie) positives.

Thm. 21: $f \in S(E)$, $f \in S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) si toutes les v.p. de f sont positives (resp. strictement positives).

Cor. 22: $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^tBB$.

Thm. 23: $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Cor. 24: $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

Thm. 25: Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors, $\exists B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tq $A = B^2$

Thm. 26: (Décomposition polaire) $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Lemme 27: $\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\|S\|_2 = \sqrt{p(S)}$

Thm. 28: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

III. Endomorphismes orthogonaux.

a- Groupe orthogonal et réduction des endo. orthogonaux

Prop. 29: Soit $f \in O(E)$.

• les vp de f sont 1 ou -1

• $\det(f) = \pm 1$ donc f est bijective

Def. 30: $f \in O(E)$ si $\det(f) = 1$ (resp. -1) f est dit transformation orthogonale direct (resp. indirecte)

Prop. 31: f est orthogonal si elle transforme toutes bases en base orthornormée.

Def/prop. 32: $O_n(\mathbb{R})$ est sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal.

Prop. 33: $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ est appelé groupe spécial orthogonal.

Rmq. 34: Pour vérifier qu'une matrice est orthogonal il suffit de vérifier que ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n$

Thm. 35: Soit $f \in O(E)$ ($n \geq 2$). Il existe B une base orthornormée tq

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_q & \\ (0) & & R_1 \dots R_r \end{pmatrix}$$

$$tq R_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix} \quad \theta_k \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$$

b) Etude en dimension 2 et 3

Prop. 36: Si $A \in SO_2(\mathbb{R})$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

Rmq. 37: Le premier cas représente une rotation d'angle θ et de centre O , cf Fig 1

Le 2nd cas représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\theta/2$, cf Fig 2

Prop. 38: Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ t.q.
 $A = M_{(e_i)}(f)$ où (e_i) est la base canonique. Il existe une base
 (f_i) orthonormée de $\mathbb{R}^3$ t.q.

$$A' = M_{(f_i)}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon = \pm 1$.

$\varepsilon = 1$ si $\det(A) = 1$ (ie $A \in SO_3(\mathbb{R})$)

$\varepsilon = -1$ si $\det(A) = -1$ (ie $A \notin SO_3(\mathbb{R})$)

Rmq. 39: Si $\det(A) = 1$, f représente une rotation autour
de l'axe E_1 . (cf. fig. 3)

Si $\det(A) = -1$, f est la rotation autour de l'axe E_1 suivie
de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_1^\perp$. (cf. fig. 4)

Prop. 40: Soit $A \in O_3(\mathbb{R}) \neq \pm I_3$

• Si $\det(A) = 1$, l'angle de la rotation autour de l'axe
 E_1 (non orienté) est $\text{Tr}(A) = 2\cos(\theta) + 1$

• Si $\det(A) = -1$, l'angle de la rotation donné avant
la symétrie (non orienté) est $\text{Tr}(A) = 2\cos(\theta) - 1$

• En particulier si $\text{Tr}(A) = 1$, on a $\theta = 0$ et dans
ce cas A est la symétrie orthogonale par rapport au
plan $E_1^\perp$ (également appelée réflexion par rapport à $E_1^\perp$)

Annexe:

Figure 1: $A \in SO_2(\mathbb{R})$

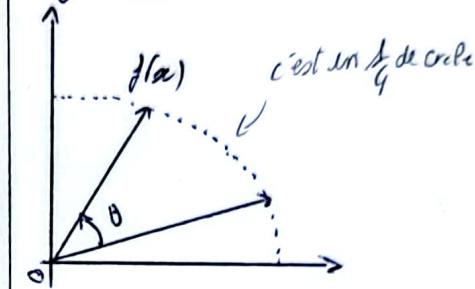


Figure 2: $A \notin SO_2(\mathbb{R})$

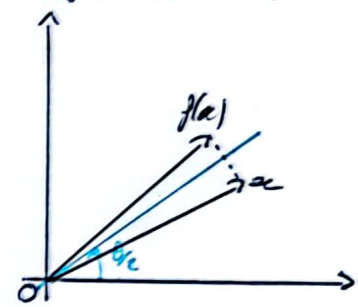
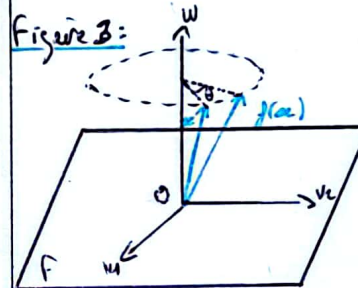
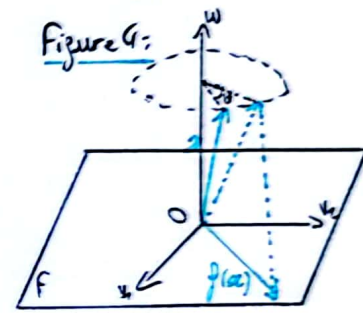


Figure 3:



$\det(A) = 1$

Figure 4:



$\det(A) = -1$

Références:

[GRIS]: Grifame, algèbre linéaire

[GOU]: Goussier, Algèbre et proba

[ROM]: Rombaldi, Algèbre et géométrie