

156: Endo trig et nilpotent.

I. Polynômes d'endomorphismes E K -ev de dim finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$

Def. 1: $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K[X]$, on définit $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ la sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u constituée des endo. vérifiant $v = P(u) v$ où $P \in K[X]$ est nulle $K[u]$.

Prop. 2: $K[u]$ est une algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$

Prop. 3: $\varphi: K[X] \xrightarrow{\text{surj}} K[u]$ est un morphisme d'algèbre d'image $K[u]$
 $P \mapsto P(u)$

Def. 4: On appelle idéal annulateur de u , $I_u = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$

Prop. 5: I_u est un idéal de $K[X]$

Rem. 6: $I_u = \text{Ker}(\varphi)$, et $I_u \neq \{0\}$ car $\{u^k \mid k \geq 0, n\}$ est liée

Def. 7: le générateur de I_u est noté T_u et est appelé pol. min.

Thm. 8: $\dim K[u] = \deg T_u$. une base de $K[u]$ est (u^k)

Def. 9: Soit F un sev stable de E par u . On appelle $0 \leq k \leq \deg T_u - 1$ induit sur F $u_F: F \rightarrow F$
 $x \mapsto u(x)$

Prop. 10: Soit F sev stable de E . $\pi_{u_F} \mid \pi_u$

Def. 11 On appelle pol. car. de u $\chi_u(X) = \det(u - X I_n) \in K[X]$

Thm. 12: (lemme des moutons) $P = P_1 \dots P_k \in K[X]$ où les P_i sont irréductibles $\mathbb{Z}[X]$. Alors

$$\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_k(u)$$

Thm. 13: (Cayley-Hamilton) $\chi_u(u) = 0$

Cor. 14: $\pi_u \mid \chi_u$

II. Endomorphismes trigonalisable E K -ev de dim finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$

a) Définitions et critères

Def. 15: On dit qu'un endomorphisme est trigonalisable si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire

Thm. 16: u est trigonalisable si u admet un pol. annulateur scindé si son pol. min est scindé.

Cor. 17: un endomorphisme sur un $\mathbb{C}$ -ev est trigonalisable

Appl. 18: $(E, \|\cdot\|)$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ au $\|\cdot\|_n$ tq $\|A\| \leq P(A) + \epsilon$

Appl. 19: $A \in GL_n(K)$, $b \in K^n$. u l'unique sol. de $Au = b$. Posons $u_0 \in K^n$ et $u_{k+1} = M^{-1}(N u_k + b)$ où $A = M - N$ avec $M \in GL_n(K)$ (u_k) cv vers u si $\rho(M^{-1}N) < 1$

Cor. 18: Si u est trigonalisable et si F sev de E stable par u alors u_F est trigonalisable

Rem. 19: En calculant le pol. car. dans une base de trigonalisation on retrouve que les coef. diagonaux sont exactement les v.p.

E - particulièrement la trace est la somme des vp avec multiplicité
le det \quad le produits

b) Co-trigonalisation

Thm. 20: (co-trigonalisation) Soient $(u_i)_{i \in I, |I|=n}$ des endo. trigonalisables tq ces endo commutent $\forall i, j$. Alors les u_i sont trigonalisables dans une base commune.

III. Endomorphismes nilpotents E sev. de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$

a) Définition et ppt

Prop. 21: F sev stable de E . $\text{Ker}(u_F) = F \cap \text{Ker}(u)$ et $\text{Im } u_F = u(F)$.

Cor. 22: $k \in \mathbb{N}$ $\dim(\text{Ker } u^{k+1}) = \dim(\text{Ker } u^k) + \dim(\text{Im } u^k \cap \text{Ker } u)$

Prop. 23: $(\text{Im } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une décroissante

Prop. 24: $(\text{Ker } u^k)$ est croissante stationnaire

Prop. 25: $(\dim(\text{Ker } u^{k+1}) - \dim(\text{Ker } u^k))_k$ est décroissante

Def. 26: u est dit nilpotent si il existe $m \in \mathbb{N}$ tq $u^m = 0$
On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endo. nilpotents sur E .

Ex. 27: la dérivation $K[X] \rightarrow K[X]$ est nilpotent.
 $P \mapsto P'$

Mais pas sur $K[X]$. (on a besoin d'un contrôle sur le degré)

Def. 28: On appelle indice de nilp. de u le plus petit m tq $u^m = 0$.

[ROM]
p. 933
- 936

[MAN]
p. 17
- 18

[GOU]
p. 160

[GOU]
p. 175
- 177

[MAN]
p. 93

[DUMS]
p. 167
[DEV]

[MAN]
p. 93
- 95

[MAUS]
p. 14

[BEC]
p. 168

b) Cone nilpotent

Prop. 28: $\mathcal{N}$ est un cone. C'est à dire, $\forall \lambda \in K, \forall u \in \mathcal{N}(E)$ $\lambda u \in \mathcal{N}(E)$.

Rmq. 29: $\mathcal{N}(E)$ n'est pas un idéal, ni un sev (pas stable par addition).

Ex. 30: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$ n'est pas nilpotente.

Prop. 31: Si $n = 2$, $\chi_M = \lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det(M)$. On en déduit que $\text{tr}(M) = \det(M) = 0$

D'où, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a $-a^2 - bc = 0$.

(cf fig 1 pour le dessin du cône)

Prop. 32: Soit $u, v \in \mathcal{N}(E)$ tq $uv = vu$. Alors $u+v \in \mathcal{N}(E)$

Prop. 33: $u \in \mathcal{N}(E), v \in \mathcal{I}(E)$. tq $uv = vu$ alors $u+v \in \mathcal{N}(E)$.

c) Caractérisations

Thm. 34: Les ASE:

- (i) $u \in \mathcal{N}(E)$
- (ii) $\chi_u = (-1)^n X^n$
- (iii) $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $\pi_u = X^p$ (est l'indice de nilpotence)
- (iv) u est trigonalisable avec des 0 sur la diag.
- (v) u est trig. et sa seule vp est 0.

Prop. 35: $\text{vect}(\mathcal{N}(E)) = \text{Ker}(\text{Tr}) = \{u \in \mathcal{I}(E) \mid \text{Tr}(u) = 0\}$

Prop. 36: Dans un corps de caractéristique nulle:

$\text{tr}(u^k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ si $\chi_u = (-1)^n X^n$ si u nilpotent.

III. Application à la réduction E K -ev de dim. $n \in \mathbb{N}, u \in \mathcal{I}(E)$

a) Décomposition de Jordan

Lemme 37: $f \in K[X]$ pol annulateur de u . $f = p M_1^{a_1} \dots M_s^{a_s}$ sa décomp. en irr. $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ metons $V_i = \text{Ker } M_i^{a_i}(u)$. On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$.

Et $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, la projection sur V_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un pol. en u .

Thm. 38: (Décomposition de Jordan) Soit χ_u est scindé sur K . $\exists! (d, m) \in \mathbb{I}(E)^2$ tq

• d diagonalisable et m nilpotent

• $d + m = u$ et $dm = md$.

De plus d et m sont des polynômes en u .

Thm. 39: Soit $A \in M_n(K)$ tq χ_A soit scindé sur K et $A = D + V$ sa décomposition de Jordan. On a:

$$e^A = e^D e^V = e^D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} V^k$$

Et la décomp. de Jordan de e^A est

$$e^A = \underbrace{e^D}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{e^D(e^V - I_n)}_{\text{nilpotente}}$$

b) Décomposition de Jordan

Def. 40: On appelle bloc de Jordan de taille n la matrice

$$J_n := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Rmq. 41: J_n est la transposée de la matrice compagnon du polynôme X^n .

Prop. 42: J_n est nilpotente d'indice n .

Prop. 43: Les ASE:

- (i) $\exists$ une base dans laquelle u est en bloc de Jordan
- (ii) u est nilpotent d'indice n
- (iii) u est un endo. nilpotent de rang $n-1$

Thm. 44: (Réduction de Jordan dans le cas nilpotent)

Si $u \in \mathcal{N}(E)$, alors il existe $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ et B une base de E tq

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{m_p} \end{pmatrix}$$

[GOU]

p. 206

-205

DEV2

[GOU]

p. 75

[BEC]

p. 169

[BEC]

p. 70

-171

[BEC]

p. 171

-172

De plus il y a univité des m_i au sens suivant:
Soient $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$, B' base de E dans laquelle

$$\text{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} \sum m_i & (0) \\ (0) & \sum m_i \end{pmatrix} \text{ alors } m_i = m_i \quad \forall i \text{ et } q=p$$

Prop. 45 On peut donc associer à $u \in \mathcal{U}(E)$ une suite $(V_1(u), \dots, V_m(u))$ où $V_i(u)$ est le nombre de bloc de Jordan de taille i , dans la réduite de Jordan de u .

Prop. 46 $u, v \in \mathcal{U}(E)$ sont semblablessi $\forall i \quad V_i(u) = V_i(v)$.

Ex. 47: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilps de rang 2 mais pas semblables.

Cor. 47: soit $u \in \mathcal{U}(E)$

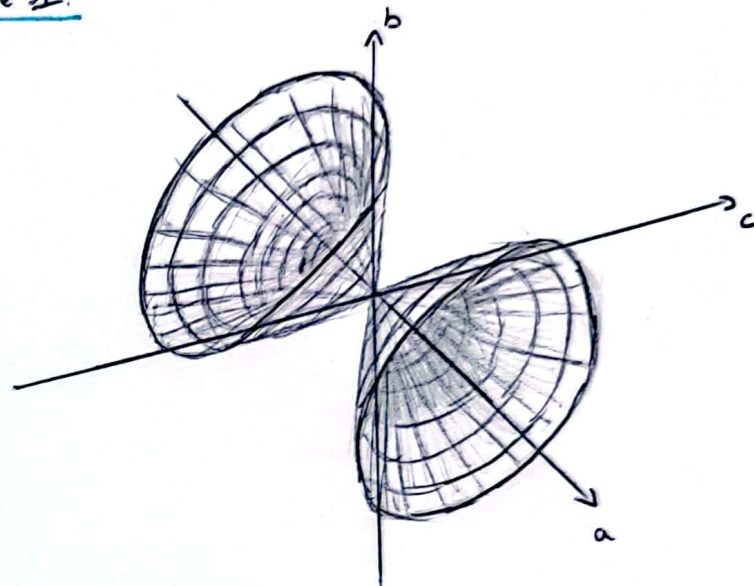
(i) 2 indices de nilpotence de u est la plus grande taille des blocs de Jordan

(ii) $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, $V_j(u) = 2 \dim(\ker u^j) - \dim(\ker u^{j-1}) - \dim(\ker u^{j+1})$

(iii) $\dim \ker(u) = \sum_{j=1}^m V_j(u)$

ajouter Jordan cas général?

Figure 1.



$$-a^2 = bc \quad (a = \sqrt{-bc} \text{ ou } a = -\sqrt{-bc}) \quad \left. \begin{array}{l} b < 0 \text{ et } c > 0 \\ \text{ou} \\ b > 0 \text{ et } c < 0 \end{array} \right\}$$

ZRONS: Rom Zaldi, alg. et géo ...

ZHANS: Monay, Minimi, Red. indo.

LGOS: Gander, Algèbre

CDUM: Deumas, Modélisation à l'école ...

CBECS: Beck, Obj. algèbre.