

Leçon 155: Exp. Matrice et applications.

I. Exponentielle de matrice $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$A, B \in M_n(K)$. $M_n(K)$ muni d'une norm algébrique. Rem: il norme sur K^n $\|A\|_K \sup_{x \in K^n, \|x\|=1} \|Ax\|$

a) Série matricielle

Def. 1: On appelle rayon spectral de A $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$

Prop. 2: $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$ et $\rho(A) \leq \|A\|$

Thm. 3: (Gelfand) $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$

Thm. 4: $\sum a_k z^k$ série entière à coeff dans K , de rayon de cv R

Si $\rho(A) < R$ alors $\sum a_k A^k$ cv

Si $\rho(A) > R$ alors $\sum a_k A^k$ dv

Thm. 5: Si on note $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ la somme de la série entière $\sum a_k z^k$. Alors $f(A) \in K[A]$

Thm. 6: Avec la notation des thm 4 et 5.

• $\rho(A) = 0$, $\forall t \mapsto f(tA)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

• $0 < \rho(A) < R$, $\forall t \mapsto f(tA)$ est C^∞ sur $J =]-\frac{R}{\rho(A)}, \frac{R}{\rho(A)}[$

Dans les 2 cas on a $f'(t) = A f'(tA)$

b) Exponentielle de matrice définition et premières propriétés

Prop. 1 def. 7: $\sum \frac{1}{k!} A^k$ est convergente et on note $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

Prop. 8: e^A commute avec A .

Prop. 9: Si $B = P^{-1}AP$, $P \in GL_n(K)$, $e^B = P^{-1}e^A P$

Prop. 10: $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$

Prop. 11: e^A est inversible d'inverse e^{-A}

Thm. 12: A, B commutent $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$

Ex. 13: $\forall k \in \mathbb{N} e^{kA} = (e^A)^k$, $e^0 = I$, $e^{I-} = e^{-I}$

c) Méthodes de calcul

Prop. 14: Si A nilpotente d'ordre $q \geq 1$ $e^A = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} A^k$

Prop. 15: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Prop. 16: Si A diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres e^A est diagonalisable et ses valeurs propres sont $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$

Lemme 17: $p_1, \dots, p_r \in K[X]$ non nuls 2 à 2 premiers entre eux

Posons $P = \prod p_i$ alors $\ker P(u) = \bigoplus \ker p_i(u)$ et $\ker p_i(u) \rightarrow \ker p_i(u)$ sont dans $K(u)$

Thm. 18: (Dunford) Si $A \in M_n(K)$ et son pol. caractéristique est scindé alors $\exists (D, V) \in M_n(K)^2$ tq D soit diagonalisable et V nilpotente, D et V commutent et $A = D + V$.

De plus D, V sont des pol. en A .

Appli. 19: Avec les notations du thm 18 $e^A = e^D e^V$ et décomp. Dunford $e^A = e^D + e^P (e^V - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^P (e^V - I_n)$ est nilpotente.

Rmq. 20: On retrouve le fait que $e^D \in K[D]$ et $e^A \in K[A]$

Cor. 21: $A \in M_n(K)$ tq χ_A scindé. e^A diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable

II. Etude fonctionnelle de l'exponentielle

a) Régularité

Thm. 22: $\exp: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ est continue

Thm. 23: $\exp$ est C^∞ sur $M_n(K)$, $\forall X, U \in M_n(K)$

$$d(\exp)(X)(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} X^i U X^j \right)$$

b) Autours de l'injectivité et la surjectivité

Rmq. 24: • que ce soit sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ l'exponentielle n'est pas injective
Dans $\mathbb{C}$: en dim 1 $e^{2ik\pi} = 1 \forall k \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{R}$ $\exp \begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix} = I \in KZ$

[ROM]
p. 447

[CROM]
p. 593

Dev 1
[CROM]
p. 603

[ROM]
p. 751

[CROM]
p. 752

[CROM]
p. 747

[CROM]
p. 748

[CRL]

p. 359

- L'exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est surjective (d'après Demond)
- L'exp. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective ($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \notin \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$)

Def. 25: On appelle logarithme matriciel l'appl.:

$$\begin{aligned} \text{Ln}: \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid |P(U)| < 1\} &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ Z_n + U &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} U^k \end{aligned}$$

[RMT]

p. 753

- 756

Notation 26: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n nilpotentes. $\mathcal{L}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A - Z_n \text{ nilpotente}\}$.

Prop. 27: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), e^A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ et $\forall t \in \mathbb{R} \ln(e^{tA}) = tA$.

Thm. 28: L'exp. de matrice réalise une bijection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ d'inverse le log. matriciel.

Thm. 29: L'exponentielle de matrice réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Cor. 30: $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Cor. 31: (racine p -ème) $p > 0, \forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \exists X \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \text{Ker } A \text{ tq } X^p = A$.

[CRL]

p. 359 et 360

Thm. 32: (image de l'exp.) $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{U^2 \mid U \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$

c) Restrictions remarquables

Def. 33: On note $S_n(\mathbb{R}) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t U = U\}$ et $S_{n++}(\mathbb{R}) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t U = U \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0, {}^t x U x > 0\}$

Def. 34: En notant $U^* = {}^t \bar{U}$ on définit $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid U^* = -U\}$ et $\mathcal{H}_{n++}(\mathbb{R}) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid U^* = M \text{ et } \forall x \in \mathbb{C}^n \mid x \neq 0, {}^t x M x > 0\}$

[CRL]

p. 359 et 363

Def. 35: $O_n(\mathbb{R}) = \{P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid P^t P = I_n\}$ et $U_n(\mathbb{C}) = \{P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid P P^* = I_n\}$

Prop. 36: $S_{n++} = \{P \in P \mid P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathcal{H}_{n++} = \{P \in P \mid P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$

Thm. 37: (Décomp. polaire) $O_n(\mathbb{R}) \times S_{n++}(\mathbb{R}) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{R})$

et $U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_{n++}(\mathbb{C}) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{C})$
 $(U, S) \mapsto OS$
 $(U, M) \mapsto UM$

Lemme. 38: $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sqrt{P(AA^t)}$

Thm. 39: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_{n++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Thm. 40: $\exp: \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_{n++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Cor. 41: $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

III Application: Equation différentielle

a) Exponentielle de matrice et equation différentielle

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}, A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in C(I, \mathbb{K}^n)$
 $(I): y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ et $(I_0): y'(t) = A(t)y(t)$

Prop. 42: $\forall t \in \mathbb{R} \phi(t) := e^{tA}, \phi$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\phi(t) = A e^{tA} = e^{tA} A$.

Prop. 43: (cas constants) Les solutions de (I_0) sont

$$y(t) = e^{tA} C \quad (C \in \mathbb{K}^n)$$

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{K}^n$ la sol. de (I_0) tq $y(t_0) = y_0$ s'écrit:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$$

Ex. 44: $\begin{cases} x' = x + ey \\ y' = 2x + y \end{cases}$

Prop. 45: Si A diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Notons v_k les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_k . Alors une base du $\mathbb{K}$ -ev des sol. de (I_0) est donnée pour $t \mapsto e^{\lambda_k t} v_k$ $k \in \{1, \dots, n\}$.

p. 54

Prép. 46: (Variation de la constante et 1 constante) $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{K}^n$

Eq $y(t_0) = y_0$. La solution de (I) est:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$$

b) Cas linéaires d'ordre n résolus à coefficient constant

$$(L_m) = y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(t)$$

(avec $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$)

[BERT]
p. 57

En posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b(t) \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{m-1} & \end{pmatrix} \quad (\text{matrice compagnon})$$

On se ramène alors au cas (I) vu précédemment.

References:

[ZOM]: Zorn, *...*

[MAN]: Manuy, *Algèbre linéaire, incl des endo*

[CAL]: Caldéro, *nouvelle histoire ... tome 1*

[BERT]: Bertheli, *eq*

[BERT]: Berly, *Algèbre & grand combat*