

154: Exemples de décomposition de matrices. Applications

I. La réduction de matrices $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a. Endomorphismes diagonalisables (*)

Def. 1: A est diagonalisable si il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ est diagonale

Prop. 2: Si χ_A est scindé à racine simple dans $\mathbb{K}$ alors A est diagonalisable

Def. 3: Soit λ une valeur propre de A . On note $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

Thm. 4: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des vp distinctes de A . Les $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe

Def/prop 5: Soit λ une racine de χ_A d'ordre de multiplicité h . Alors $\dim(E_\lambda) \leq h$. $m_A(\lambda) := h$ est appelée multiplicité algébrique de λ .

Thm. 6: Les ASE

(i) A est diagonalisable

(ii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ de χ_A , $m_A(\lambda) = \dim(E_\lambda)$

(iii) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A tq $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ (diag. simultanée)

Thm. 7: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables, tq $AB = BA$. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonalisables.

Thm. 8: (Lemme des noyaux) Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ tq les P_i soient

permutés entre eux 2 à 2. Alors

$\text{Ker}(P(A)) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(A))$

b. Endomorphismes trigonalisables

Def. 10: A est trigonalisable si il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ tq A est triangulaire supérieure.

Thm. 11: A est trigonalisable si χ_A est scindé

Rmq. 12: Une matrice à coefficients dans un corp algébriquement clos est trigonalisable

Thm. 12: (Trigonalisation simultanée) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tq $AB = BA$, alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires.

C. Décomposition de Jordan

Lemme 13: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de A . Notons $P = P_1^{a_1} \dots P_s^{a_s}$ sa décomposition en irréductible. $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ notons $N_i := \text{Ker}(P_i^{a_i}(A))$. On a alors $E = \bigoplus N_i$, et $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ la proj. sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en A .

Thm. 14: (Décomposition de Jordan) Supposons que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tq:

- D est diagonalisable
- N est nilpotent
- $A = D + N$ et $DN = ND$.

De plus D et N sont des polynômes en A .

d. Décomposition de Jordan

Def. 15: On appelle bloc de Jordan de taille $m \in \mathbb{N}^*$ la matrice

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Rmq. 16: J_m est nilpotente et $\text{rg } J_m^k = m - k$.

Prop. 17: Si A est nilpotente tel qu'il existe $d_1 := \deg(\mu_A) \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tq: (μ_A pol. min. de A)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_r} \end{pmatrix}$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, le nombre de blocs de Jordan de taille k de $P^{-1}AP$ (c'est le nombre de $j \in \{1, \dots, r\}$ tq $d_j = k$) est $2 \dim(\text{Ker } A^k) - \dim(\text{Ker } A^{k-1}) - \dim(\text{Ker } A^{k+1})$

Prop. 18: ADMIS Si A est nilpotent alors il existe $d_1 = \deg(\mu_A) \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tq:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_r} \end{pmatrix} \quad (\text{cette matrice est appelée réduite de Jordan de } A)$$

(*) On suppose connue les notions de vp, polynômes annulateur, caract, et minimal

(KON)
p.149
-150

Prop.19: ADUIS Soit A_n est scindé. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les vp de A distinctes. Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,r_j}$ telles que il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,r_1}} + J_{d_{1,r_1}}, \dots, \lambda_m I_{d_{m,1}} + J_{d_{m,1}}, \dots, \lambda_m I_{d_{m,r_m}} + J_{d_{m,r_m}})$$

cette matrice est appelée réduite de Jordan de A

Rmq.20: J_P a plusieurs blocs de Jordan associés à une même vp.

Prop.21: Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tq χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{K}$. A et B sont semblables ssi A et B admettent même réduite de Jordan.

II. Décomposition dans $GL_n(\mathbb{K})$

a- Générateur de $GL_n(\mathbb{K})$

(KON)
p.139

Def.22: On appelle matrice de transvection une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$

(KON)
p.138

Def.23: On appelle matrice de dilatation une matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ $i \in \{1, \dots, n\}$

(KON)
p.140
-141

Thm.24: $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections

Thm.25: $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Rmq.26: Les matrices $T_{i,j}(\lambda)$ et $D_i(\lambda)$ représentent les opérations élémentaires:

- La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i (resp. la colonne i) par λ .

- La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice $T_{i,j}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ (resp. colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$)

Thm.27: $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^s Q_j$ où P_k et Q_j sont des matrices de transvection et $\lambda = \det(A)$

(KON)
p.681
-682

Cor.28: $SL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs

Cor.29: $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ (donc $GL_n(\mathbb{R})$ pas connexe)

b- Théorème spectral et applications $A \in M_n(\mathbb{R})$

Thm.30: (théorème spectral) Si A est symétrique alors A est diagonalisable dans une base orthonormée. (i.e, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq PAP est diagonale)

Def.31: A est dite symétrique positive si $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ et $A^t = A$

A est dite symétrique définie positive $\begin{matrix} \diagup & & \diagdown \\ & > 0 & \\ \diagdown & & \diagup \end{matrix}$
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ ($S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (définies) positives

Thm.32: $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si toutes ses vp sont ≥ 0
 $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si $\begin{matrix} \diagup & & \diagdown \\ & > 0 & \\ \diagdown & & \diagup \end{matrix}$

Thm.33: (Sylvester) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si tout ses mineurs principaux sont > 0 .

Thm.34: (Décomp. polaire) $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$
 $(O, S) \mapsto OS$

Lemme.35: $\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S)}$

Thm.36: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

III. Décomposition de matrice et résolution de système linéaire

a- Décomposition LU

Notation.37: L'ensemble des matrices triangulaires inférieures (supérieures) est noté $TI_n(\mathbb{R})$ ($TS_n(\mathbb{R})$)

Thm.38: $A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k} & \dots & a_{k,k} \end{pmatrix} \text{ est inversible (} \det(\Delta_k) \neq 0 \text{ détermine les } \text{vp principales de taille } k \text{ de } A)$$

Alors il existe une unique $(L, U) \in TI_n(\mathbb{R}) \times TS_n(\mathbb{R})$ tq les coef. diag. de L sont des 1 et $A = LU$

(KON)
p.72
-723

(KON)
p.348

(KON)
p.351

(KON)
p.351

(KON)
p.15

(KON)
p.16

DEVE

CDUMS
p. 161

Rmq. 38: La factorisation LU permet de résoudre une équation $Au = b$. Ce qui nous amène alors à résoudre 2 systèmes triangulaires $Lw = b$ et $Uu = w$.

DEV B

b. Décomposition de Cholesky

CDUMS
p. 165
- 162

Thm. 40: $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists ! B = (b_{ij}) \in T_n(\mathbb{R})$ tq $\forall i \in \{1, \dots, n\} |b_{ii}| > 0$ et tq $A = B^t B$

Rmq. 41: Cette méthode est environ 2 fois plus rapide que celle de Gauss.

c. Méthode itérative $A \in GL_n(\mathbb{R})$

On cherche à résoudre un système linéaire $Au = b$. On construit une suite de solution approchée (u_k) issue de la résolution d'un système linéaire plus simple

CDUMS
p. 167

Def. 42: On appelle décomposition régulière de A la donnée de $(M, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ et $A = M - N$ construisons (u_k) tq $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $u_{k+1} = Nu_k + b$ ($k \in \mathbb{N}$) On dit que cette méthode est CV si $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n (u_k) \text{ CV}$.

DEV 3

Lemme 43: $A \in M_n(\mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$ tq $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Thm. 44: La méthode itérative associée à (M, N) de A CV si $\rho(M^{-1}N) < 1$ ($\rho = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Spec}(A)\}$)

Selon la décomposition régulière de A la méthode itérative a un nom différent

CDUMS
p. 169
- 172

Nom de la méthode	M	N
Jacobi	D	D - A
Gauss-Seidel	D - E	F
Relaxation	$\frac{D}{w} - E$	$\frac{1-w}{w} D + F$
Gradient	$\frac{1}{2} I$	$\frac{1}{2} I - A$

$A = \begin{pmatrix} & & -E \\ & D & \\ -F & & \end{pmatrix}$
 $w > 0$
 $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Références:

EGOUJ: Gaudin, Algèbre et proba

CHAMS: Mmouy, Réduction ..

EROMJ: Rembault, algèbre ..

ICALJ: Caldero, Une histoire... T1

EDUMJ: Dumas, Modélisation à l'écrit de l'algèbre.