241 Suites et Series de fonctions. Exemples et contre-exemples

On considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Modes de convergences, propriétés

1) Suites de fonctions

On considère X un ensemble quelconque, $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X vers $\mathbb{K}$.

Déf 1 : - On dit que (f_n) converge simplement vers f si
$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

- On dit que (f_n) converge uniformément vers f si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Prop 2 : La convergence uniforme implique la convergence simple

Rem 3 : La réciproque est fausse.

Contre-exemple 4 : $f_n : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{K} \\ x \to x^n\end{array}$ converge simplement vers $f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{K} \\ x \to \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 & \text{si } x = 1\end{cases}\end{array}$
mais pas uniformément.

Prop 5 (Critère de Cauchy uniforme) : (f_n) converge uniformément vers une fonction f ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

2) Continuité et dérivabilité

On suppose désormais que X est muni d'une métrique d.

Thm 7 : Si (f_n) converge uniformément vers f et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in X$, alors f est continue en x_0

Rem 8 : La convergence uniforme n'est nécessaire que sur un voisinage de x_0.

Rem 9 : La convergence simple ne suffit pas.

Contre-exemple 10 : $f_n : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{K} \\ x \to x^n\end{array}$ converge simplement vers $f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{K} \\ x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}$

Les f_n sont tous continues mais f n'est pas continue.

Thm 10 (Dini) : Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose X compact et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f_{n+1}$. Si les f_n sont tous continues et convergent simplement vers f continue, alors la convergence est uniforme.

- On suppose $X = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues. Alors si les f_n convergent simplement vers f continue, elles convergent uniformément vers f.

Exemple 11 : $f_n : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \to (1+\frac{x}{n})^n\end{array}$ converge uniformément vers $x \to e^x$

Thm 12 : Ici $X = [a,b]$. Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui convergent uniformément vers f alors f est continue
et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)\,dt$

Cor 13 : Ici $X = [a,b]$.
Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui convergent uniformément vers f alors $F = \begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{K} \\ x \to \int_a^x f(t)dt\end{array}$ est limite uniforme de $F_n = \begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{K} \\ x \to \int_a^x f_n(t)dt\end{array}$.

Thm 14 : Soit $(f_n)_n \in C^1([a,b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tel que :
- il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f(x_0))$ converge
- la suite (f_n') converge uniformément vers g.

Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction $f \in C^1([a,b], \mathbb{K})$ vérifiant $f' = g$.

3) Série de fonctions

Def 15 : $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers f si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) vers f.

Thm 16 : Si $\sum f_n$ converge simplement vers S alors $\sum f_n$ converge uniformément vers S ssi $(R_n = S - S_n)_n$ converge uniformément vers 0.

Def 17 : On dit que $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Thm 18 : La convergence normale implique la convergence uniforme

Ex 19 : La série $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[0,1]$

Rem 20 : La réciproque est fausse.

Contre-Exemple 21 : La série $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$ mais pas normalement.

Thm 22 : Si les f_n sont continues et que $\sum f_n$ converge uniformément vers S alors S est continue.

Thm 23 : Si les f_n sont $C^1([a,b],\mathbb{K})$, que $\sum f_n'$ converge uniformément vers g et qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge alors $\sum f_n$ converge uniformément vers $S \in C^1([a,b],\mathbb{K})$ et

$$S' = g.$$

Thm 24 : Si les f_n sont $C^0([a,b],\mathbb{K})$ et $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue, $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ existe et $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$

Contre-Exemple 25 : $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge simplement sur $[0,2\pi[$ mais n'est pas continue en 0. On a même convergence uniforme sur tout $[a,b] \subseteq]0,2\pi[$

4) Intégrabilité

Dans cette section, $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré.

Def 26 : (f_n) converge μ-presque partout vers f s'il existe $Y \subseteq X$ tel que $\mu(X\setminus Y) = 0$ et (f_n) converge simplement vers f sur Y.

Ex 27 $f_n : x \mapsto x^n$, $[0,1] \to \mathbb{K}$, converge λ-presque partout vers 0.

Def 28 : $(f_n) \in (L^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mu)$ si $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Rem 29 . Pour $p \neq \infty$, la convergence μ-pp n'implique pas la convergence $L^p(\mu)$ et la convergence $L^p(\mu)$ n'implique pas la convergence μ-pp.

Contre-exemple 30 :

$f_n = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}]}(x)$ avec $2^N \leq n+1 < 2^{N+1}$ et $k = n - 2^N + 1$

converge vers 0 pour $L^p(\mu)$ mais diverge μ-presque partout.

$f_n = n^{1/p}\mathbb{1}_{[0,1/n]}$ converge μ-pp vers 0 mais $\|f_n\|_p = 1$

Thm 31 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonction μ-mesurables positives alors $\lim_n f_n$ est mesurable et $\int_X \lim f_n \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu$.

Thm 32 (Fatou) : Soit (f_n) une suite de fonctions positives de $L^1(\mu)$ et telque $\sup_{n\geq 0} \int_X f_n \, d\mu < +\infty$ alors

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu$$

Contre-Exemple 33 : On peut avoir l'inégalité stricte :

$$f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$$

Thm 34 (Convergence dominée) : si $(f_n) \in L^1(\mu)^{\mathbb{N}}$, f_n converge μ-pp vers f et il existe $g \in L^1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ μ-pp alors $f \in L^1$, $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ et $\lim \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$

dev 1

Thm 35 : Pour $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est complet et de toute suite convergente dans L^p, on peut extraire une sous-suite convergente presque partout.

Thm 36 : Soit (f_n) une suite de fonction μ-mesurable tel que ~~[illegible]~~

$\sum \|f_n\|_1$ converge. Si f désigne la somme de la série $\sum f_n$ alors $f \in L^1(\mu)$ et $\sum_{n \geq 0} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

II) Séries entières

Dans cette section (a_n) désigne une suite complexe.

Thm 37 (Abel) : s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$ avec $0 \leq r < |z_0|$

Thm 38 : Il existe un unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

- $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente
- $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Def 39 : On appelle R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$

Ex 40 : $\sum \frac{z^n}{n!}$: $R = +\infty$ $\quad \sum z^n$: $R = 1$ $\quad \sum n! z^n$: $R = 0$

Rem 41 : On ne peut a priori rien dire sur la convergence de $\sum a_n z^n$ pour $|z| = R$

Contre-exemple 42 : $\sum \frac{(-1)^n z^n}{n}$ $R = 1$, $\sum \frac{(-1)^n 1^n}{n}$ converge et $\sum \frac{(-1)^n (-1)^n}{n}$ diverge

Def 43 : Soit f définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière (DSE) en z_0 s'il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nulle et il existe un voisinage V de z_0 tel que $\forall x \in V$, $f(x) = \sum a_n (z - z_0)^n$

Prop 44 : Si f est DSE en 0 alors il existe un voisinage V de 0 tel que $f \in C^\infty(V, \mathbb{K})$ et $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour tout $x \in V$.

Ex 45 : $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum z^n$ sur $D(0,1)$

Rem 46 : Une fonction C^∞ n'est pas forcement DSE

Contre exemple 47 : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Appl 47 : On note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$. On a $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$ dvp 2

IV) Séries de Fourier

Def 48 : On pose D l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodique, continues par morceaux et tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

Def 49 : Si $f \in D$, on définit le n-ième coefficient de Fourier par $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt$

Thm 50 (Riemann-Lebesgue) : Si $f \in D$, $\lim_{n \to \pm\infty} \hat{f}(n) = 0$

Thm 51 (Dirichlet) : Si $f \in D$ et si ~~[illegible]~~ f est C^1_m alors $x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{-ikx}$ converge simplement vers f.

Prop 52 : Si $f \in D$ est continue et C^1_m alors $x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{-ikx}$ converge normalement vers f.

Appli 53 : Résolution de l'équation de la chaleur par les Série de Fourier