

148: Dimension d'un ev. Rang, exemples et applications

I. Auteur de la dimension d'un ev (K corps commutatif, E, E' K-év)

a) Familles libres, génératrices et bases

Def. 1: $\{v_1, \dots, v_p\} \subset E$ est dite génératrice si $E = \text{vect}\{v_1, \dots, v_p\}$

Ex. 1: Dans $\mathbb{R}^2$ $\{(1,0), (0,1)\}$ est génératrice

Def. 2: Un ev est de dim. finie si il existe une famille génératrice de dimension infini. Dans le cas contraire E est dit de dimension infini.

Ex. 4: $\mathbb{R}[X]$ est de dim. infini.

Désormais on suppose $E \neq \{0\}$ et E de dim. finie.

Def. 3: $\{v_1, \dots, v_p\} \subset E$ est dite libre si:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

On dit aussi que $v_1, \dots, v_p$ sont linéairement indépendants. Une famille qui n'est pas libre est liée.

Prop. 6: $\{v_1, \dots, v_p\}$ est liée si l'un des v_i appartient à l'ev engendré par les autres.

Def. 7: On appelle base une famille à la fois libre et génératrice.

Prop. 8: $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E si $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tq

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Prop. 9: Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E. Alors il existe une bijection:

$$\varphi_B: E \rightarrow K^n \quad \text{les } \alpha_i \text{ sont dit composantes de } x \text{ dans la base } \{v_1, \dots, v_n\}.$$

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Rang. 10: $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Les e_i forment une base de K^n appelée base canonique

Ex. 11: $\{1, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ forment une base de $M_2(K)$

Prop. 12: • Toutes familles contenant une famille génératrice est génératrice
• Toutes sous-familles d'une famille libre est libre.

b) Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels de dimension finie

Thm. 13: (Existence de bases) Soit une famille génératrice de E, et L $\subset$ G qui est libre. Alors il existe une base B de E tq L $\subset$ B $\subset$ G

Thm. 14: (base incomplète). De toutes familles génératrices on peut extraire une base.

Lemme 15: Dans un ev engendré par n éléments, toutes famille contenant plus de n éléments est liée.

Thm. 16: Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. ce

car. A: Dans un ev. de dim. n, toutes familles ayant plus de n éléments est liée. Et les familles ayant moins de n éléments ne peuvent être génératrice.

Prop. 19: Soient $E_1, \dots, E_p$ des K-év de dim. finie alors:

$$\dim_K(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim_K(E_1) + \dots + \dim_K(E_p).$$

Ex. 20: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

Thm. 21: Toutes familles génératrices de E à n éléments est une base.

Toutes familles libres de E à n éléments est une base.

Prop. 22: F év de E. Alors F est de dim. finie et:

- $\dim_K F \leq \dim_K E$
- $\dim_K E = \dim_K F$ ssi $E = F$.

II. Auteur de la notion de rang

a) Applications linéaires et rang

Def. / Prop. 23: $f: E \rightarrow E'$ une application linéaire. $f(E)$ est un év de E' appelé image de f et note $\text{im}(f)$. On appelle rang de f la quantité $\text{rg}(f) = \dim(\text{im}(f))$.

Def. 24: $f \in \mathcal{L}(E, E')$. $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_{E'}\}$ et est appelé noyau de f et est un év de E.

Prop. 25: $f \in \mathcal{L}(E, E')$ est injective si $\text{Ker}(f) = \{0\}$

Prop. 26: $f \in \mathcal{L}(E, E'), (v_i)$ est une famille de E.

- Si f est injective et (v_i) libre alors $(f(v_i))$ est libre dans E' .
- Si f est surjective et (v_i) génératrice alors $(f(v_i))$ est génératrice dans E' .

En particulier si f est bijective $(f(v_i))$ est une base de E' .

Thm. 27: 2 év de dim. finie sont isomorphes si ont même dimension

Ex. 28: $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont isomorphes.

Thm. 29: (théorème du rang) E, E' év de dim finie, $f \in \mathcal{L}(E, E')$ on a:

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Cor. 30: E, E' de même dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Les ASS:

- (i) f est injective
- (ii) f est surjective
- (iii) f est bijective

Rang. 31: Ce résultat est faussé en dim. infini. considérer $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $p \mapsto p'$

b) Rang d'une matrice: $n, p, q \in \mathbb{N}$

Def. 32: Soit (v_i) une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille la dimension de l'espace engendré par les (v_i) .

Soit $A \in M_{p,n}(K)$, Notons $A = (a_i, \dots, a_n)$ où les a_i sont les vecteurs

LGRI
p. 15
13

LGRI
p. 53
66

(605)
p. 80
- 81

colonnes de A . On a : $\text{rg}(C_1, \dots, C_i) = \text{rg}(C_1, \dots, C_n) = \dim(\text{vect}(C_1, \dots, C_n))$.
Prop. 33: E, F 2 ev de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $\{e_1, \dots, e_m\}, \{e'_1, \dots, e'_p\}$ 2 bases de E et F . Posons $A = \text{Mat}_{(e'_i, f_j)}(f)$ on a : $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.
Prop. 34: $A \in \text{M}_{p,m}(K)$, $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$.

(600)
p. 128

Remq. 35: Soit $A \in \text{M}_{p,q}(K)$. $\text{rg}(A) = \min(p, q)$. A est inversible si $\text{rg} A = m$.
Thm. 36: $A \in \text{M}_{p,q}(K)$. Si $r = \text{rg}(A)$, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$.
Cor. 37: 2 matrices sont équivalentes si elles ont même rang.
Thm. 38: $A \in \text{M}_{p,q}(K)$. Le $\text{rg} A$ est la plus grande dimension des matrices carrées extraites inversibles.

c) Dualité (on rappelle que E est de dim. finie $n \in \mathbb{N}^*$)

Def. 39: On définit le dual de E de la manière suivante (noté E^*): $E^* = \mathcal{L}(E, K)$

Thm. 40: $\dim(E) = \dim(E^*)$. Une base de E^* est $B^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ où $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ où $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de E .

Thm/Def. 41: Soit $B^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E^* , $B = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .
Et B' soit la base duale de B . B est appelée base contr. duale de B' .

Def. 42: On appelle hyperplan de E le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E . Sa dimension est $n-1$.

Remq. 43: 2 formes linéaires définissent le même hyperplan si elles sont liées.

Thm. 44: Un hyperplan de E est soit de E supplémentaire d'une droite.

Def. 45: L'orthogonal dans E^* de $X \in E$ est $X^\perp := \{f \in E^* \mid \forall x \in X, f(x) = 0\}$.
L'orthogonal dans E de $Y \subseteq E^*$ est $Y^\perp := \{x \in E \mid \forall f \in Y, f(x) = 0\}$.

Prop. 46: $A, B \in E$, $U, V \in E^*$:
1) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ 2) $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$
3) $U \subset V \Rightarrow V^\perp \subset U^\perp$ 4) $U^\perp = \text{vect}(U)^\perp$

Thm. 47: 1) Soit f ev de E on a : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$

2) Soit $t \in E^*$ on a : $\dim(t) + \dim(t^\perp) = \dim(E^*)$

Thm. 48: $n \geq 2$. Si $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p} \subset E^*$ de rang r alors $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$ est de dim. $n-r$.

Si F est un sev de E , $\exists (\varphi_i)_{1 \leq i \leq p} \subset E^*$ de rang $r = n - \dim F$ tq $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$

III. Applications

a. Formes quadratiques réelles q une forme quadratique sur E $\mathbb{R}$ -ev de dim finie on note q la forme polaire de q .

Def. 49: $X \in E$. L'orthogonal de X est $X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X, \varphi(x, y) = 0\}$

Def. 50: Le noyau de q est $E^\perp$. q est dite non dégénérée si $\ker(q) = 0$.

Lemma 51: f ev de E . $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ (avec égalité si f non deg.)
• $E = F \oplus F^\perp$ si $q|_F$ non dégénérée.

Thm. 52: (Réduction de Gauss) Si q est non nulle sur E , $\exists r \in \{1, \dots, n\}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^*$, $\exists p_1, \dots, p_r \in E^*$ indépendantes tq:

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i^2(x)$$

Def. 53: On définit le rang de q tq $\text{rg}(q) = \dim(E) - \dim(\ker(q))$

Def/Thm 54: Il existe un unique couple $(s, t) \in \mathbb{N}^2$ tq pour toutes bases q -orthogonales $(e_1, \dots, e_n)$ de E on a:

$$s = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid q(e_i) > 0\}| \quad t = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid q(e_i) < 0\}|$$

Ce couple est appelé signature de q .

Thm. 55: Notons P (resp N) l'ensemble des sev de E sur lesquels la restriction de q est positive (resp. négative). Alors:

$$s = \max_{E^+ \in P} \dim(E^+) \quad t = \max_{E^- \in N} \dim(E^-)$$

b) Extension de corps et structure d'ev M, L, K corps commutatifs

Prop/Def. 56: L/K . L est un K -ev. Si $\dim_K L < \infty$ on pose $\dim_K L := [L:K]$ appelé degré de L sur K .

Thm. 57: (Base télescopique) $M/L/K$ (e_i) base de L sur K , (f_j) base de M sur L alors $(e_i f_j)$ est une base de M sur K . Si les degrés sont finis on a : $[M:K] = [M:L][L:K]$

Thm/Def 58: L/K . $\alpha \in L$. Les ASSE:

- (i) L est algébrique sur K
- (ii) $K[\alpha] = K(\alpha)$
- (iii) $\dim_K K(\alpha) = \deg(\text{pol}_\alpha, K)$ (pol_α, K pol. min de α sur K)

c) Corps des nombres constructibles et polygones constructibles

Def. 59: $B \subset \mathbb{R}^2$ ayant au moins 2 éléments et B fini. Les éléments de B sont appelés points de base.

Un point $M \in \mathbb{R}^2$ est dit constructible à partir de B si il existe une suite finie de points de $\mathbb{R}^2$ finissant par M : $M_1, \dots, M_n = M$ tq

DEV 1a1
[RONS
p. 68
- 69

[RONS
p. 68
- 69

DEV 1b1

[PER)
p. 65
- 67

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ U_i est le point d'intersection de :

- 2 droites
- d'une droite et d'un cercle
- de 2 cercles

Ces droites et cercles sont obtenues à partir de $E_i = BU\{U_1, \dots, U_{i-1}\}$ où :

- chaque droite passe par 2 points distincts de E_i
- chaque cercle est centré en un point de E_i et a pour rayon la distance entre 2 points de E_i .

On prendra $B = (0,0), (1,0)$

Def. 60: Un réel est dit constructible si c'est une des coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ d'un point constructible.

Thm. 61: L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres constructibles est un sous corps de $\mathbb{R}$ stable pour racines carrées.

Thm. 62: (Wantzel) $t \in \mathbb{R}$ est constructible si $\exists p \geq 1$ et $L_1, \dots, L_p$ des sous corps de $\mathbb{R}$ tq:

- $L_1 = \mathbb{Q}$
- $\forall j \in \{1, \dots, p-1\} L_j \subset L_{j+1}$ et $[L_{j+1} : L_j] = 2$
- $t \in L_p$.

Def. 63: Un angle θ est dit constructible si $\cos(\theta)$ est constructible.

Lemme. 64: Soient m, n 1^{er} entre eux, $\frac{2\pi}{mn}$ constructible si $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$ constr.

Lemme. 65: Soit $n \geq 3$ tq $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ sa décomposition en nombre 1^{er}. Le polygone à n côtés est constructible si $\frac{2\pi}{n}$ est constructible.

Lemme. 66: Soit ζ_p une racine p -ème de l'unité (p 1^{er}) $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ est cyclique.

Thm. 67: Soit p 1^{er} de Fermat ($p = 1 + 2^{2^k}$) alors $\frac{2\pi}{p}$ est constructible.

Thm. 68: L'angle $\frac{2\pi}{2^a}$ est constructible. Soit $p \geq 3$ 1^{er}, $\frac{2\pi}{p}$ constructible si $a=1$ et p 1^{er} de Fermat.

Thm. 69: (Gauss - Wantzel) Les polygones réguliers constructibles sont ceux à 2^a côtés ou $2^a p_1 \dots p_r$ (où les p_i sont des nombres premiers de Fermat distincts) côtés.

Références:

GRIS: Grifone, Algèbre linéaire

GOUS: Goursat, Algèbre et proba

ROMS: Rombaldi, Algèbre --

CHAR: Carrière, construction --