NOM : CARETTE   Prénom : Titouan   Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Leçon 239 - ~~Leçon~~ Fonction définie par une intégrale à paramètre, Exemples et Applications.

Autre sujet :

Réf ; Objectif Agrégation, Zuily-Queffélec Analyse pour l'agrégation, Colmez, Gourdon

I) Propriétés

Cadre : $f : E \times X \to F$; $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $F \subseteq \mathbb{C}$, E métrique, ~~f mesurable~~

$$F(t) = \int_X f(t,x)\,dx.$$

Thm 1 : Théorème de continuité sous l'intégrale.

Si : (i) $\forall t \in X$ $f(t,\cdot) : x \mapsto f(t,x)$ mesurable sur X

(ii) Pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot,x) : t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E.

(iii) Pour tout compact $K \subseteq E$, il existe $g \in L^1$ positive indépendante de t telle que $|f(t,x)| \leq g(t)$ pour presque tout x pour tout t.

Alors $F(t) = \int_X f(t,x)\,dx$ est bien définie et continue sur E.

Thm 2 : Théorème de dérivation sous l'intégrale.

- E intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Si : (i) $\forall t \in E$ $f(t,\cdot) : x \mapsto f(t,x)$ intégrable

(ii) Il existe $N \subseteq X$, $\mu(N) = 0$, $\forall x \notin N$, $f(\cdot,x) : t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur E

(iii) Pour tout compact $K \subseteq E$, il existe $g \in L^1$ positive telle que $|\partial_t f(t,x)| \leq g(t)$ $\forall t$ pour tout $x \notin N$

Alors $F(t) = \int_X f(t,x)\,dx$ est dérivable sur E ~~et~~, $\partial_t f(t,x)$ est intégrable et $F'(t) = \int_X \partial_t f(t,x)$

Rq 3 : si $f(\cdot,x)$ est $\mathcal{C}^1$ on a F $\mathcal{C}^1$.

Rq 4 : Ces théorèmes se généralisent aux dérivées d'ordres supérieures.

Rq 5 : Attention à l'ordre des quantificateurs : le théorème ne s'applique pas à $F(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,t[}(x)\,dx$.

Application 6 : Calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ par l'étude de $$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx.$$

Rq 8 : Ces théorèmes ont pour cadre les intégrales absolument convergentes, dans le cas semi convergent on se ramène au premier cas par Ipp ou suite uniformément convergentes.

Application 9 : Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ par l'étude de $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$

Déf 10 : Fonction Gamma d'Euler.

$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\,dx$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prop 11 : Γ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} \log^k(x) e^{-x} x^{t-1}\,dx$

Prop 12 : $\lim_{t \to 0} \Gamma(t) = +\infty$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Prop 13 : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ en particulier si $n \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma(n+1) = n!$

Prop 14 : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ si :

(i) $f(1) = 1$

(ii) $f(x+1) = x f(x)$

(iii) $\log(f)$ convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Alors $f = \Gamma$.

DÉV I : Application 15 : Calcul de l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ par l'étude de $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{ixt} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$ et le calcul de $J_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{ix} x^{\alpha-1} dx$.

II) Convolution

Déf 16 : Deux fonctions $f, g : X \to F$ sont dites convolables si $x \mapsto f(x)g(x-t)$ est intégrable pour tout t. On note alors $f*g : t \mapsto \int_X f(x)g(t-x)dx$ la convolée de f et g.

Prop 17 : Inégalité de Young, si $f \in L_p$ et $g \in L_q$ avec $1 \leq p,q,r \leq \infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$ alors $f*g \in L_r$ et :

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Prop 18 : Le produit de convolution est commutatif. $f*g = g*f$.

Prop 19 : $* : L_p \times L_q \to L_r$ est un opérateur bilinéaire.

Corollaire 20 : $(L_1(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre de Banach non unitaire.

Prop 21 : Régularité : Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g$ est définie et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$, de plus : $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$.

Corollaire 22 : Si f est un polynôme et $g \in L_1$ à support compact alors $f*g$ est un polynôme.

Application 23 : Théorème de Weierstrass : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, soit K compact de $\mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur K.

Déf 24 : Approximation de l'unité. Une suite ρ_n de fonction $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$ $\rho_n(t) \geq 0$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\mu = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\|t\| \geq \varepsilon} \rho_n(t) d\mu = 0$.

Exemple 25 : $G_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2x^2}{2}}$ est une approximation de l'unité.

Prop 26 : Dilatations : Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ tq $\int \varphi d\mu \neq 0$ alors $\varphi_n(x) = n^d \varphi(xn) \left(\int \varphi d\mu\right)^{-1}$ est une approximation de l'unité.

Exemple 27 : $\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$ est une approximation de l'unité.

Application 28 : Fonction plateaux : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$ il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact telle que $\theta_{|K} = 1$, $\theta_{|\Omega^c} = 0$ et $0 \leq \theta(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Thm 28 : - Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ à support compact et ρ_n approximation de l'unité alors $\rho_n * f \to f$ uniformément.

DÉV I : Application 15 : Calcul de l'intégrale de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$$ par l'étude de $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{ixt} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx$

et le calcul de $J_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{ix} x^{\alpha-1}\,dx$.

II) Convolution

Déf 16 : Deux fonctions $f, g : X \to F$ sont dites convolables si $x \mapsto f(x)g(x-t)$ est intégrable pour tout t.
On note alors $f*g : t \mapsto \int_X f(x)g(t-x)\,dx$ la convolée de f et g.

Prop 17 : Inégalité de Young, si $f \in L_p$ et $g \in L_q$ avec $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ alors $f*g \in L_r$ et :

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Prop 18 : Le produit de convolution est commutatif.
$f*g = g*f$.

Prop 19 : $* : L_p \times L_q \to L_r$ est un opérateur bilinéaire.

Corollaire 20 : $(L_1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre de Banach non unitaire.

Prop 21 : Régularité : Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g$ est définie et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$, de plus :
$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$.

Corollaire 22 : Si f est un polynôme et $g \in L_1$ à support compact alors $f*g$ est un polynôme.

Application 23 : Théorème de Weierstrass :
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, soit K compact de $\mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur K.

Déf 24 : Approximation de l'unité.
Une suite ρ_n de fonction $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité si :
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$ $\rho_n(t) \geq 0$
(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n\,d\mu = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $\lim_{n \to +\infty} \int_{\|t\| \geq \varepsilon} \rho_n(t)\,d\mu = 0$.

Exemple 25 : $G_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2x^2}{2}}$ est une approximation de l'unité.

Prop 26 : Dilatation : Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ tq $\int \varphi\,d\mu \neq 0$ alors
$\varphi_n(x) = n^d \varphi(xn) \left(\int \varphi\,d\mu\right)^{-1}$ est une approximation de l'unité

Exemple 27 : $\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$ est une approximation de l'unité.

Application 29 : Fonction plateaux :
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$
il existe une fonction $\Theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact, telle que $\Theta_{|K} = 1$, $\Theta_{|\Omega^c} = 0$ et $0 \leq \Theta(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Thm 28 : - Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ à support compact et ρ_n approximation de l'unité alors $\rho_n * f \to f$ uniformément.