

106: Groupe linéaire d'un ev de dim. finie E , sous groupe de $GL(E)$. Appli

K est un corps commutatif, E K -ev de dim. $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Groupe linéaire

a) Définitions et premières propriétés

Def. 1: On appelle groupe linéaire de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E . On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$.

Rmq. 2: En se fixant une base de E on peut réaliser un isomorphisme de $GL(E)$ sur $GL_n(K)$.

Thm. 3: Pour $u \in GL(E)$, les ASSE:

- (i) $u \in GL(E)$.
- (ii) $\ker(u) = \{0\}$.
- (iii) $\text{Im}(u) = E$.
- (iv) $\text{rg}(u) = n$.
- (v) $\det(u) \neq 0$.
- (vi) u transforme toute base de E en une base de E .
- (vii) u admet un inverse à droite.
- (viii) u admet un inverse à gauche.

b) Groupe spécial linéaire

Def. 4: On appelle groupe spécial linéaire et on note $SL(E)$ l'ensemble des $u \in GL(E)$ tq $\det(u) = 1$. De même $SL_n(K) = \{u \in GL_n(K) \mid \det(u) = 1\}$.

Thm. 5: $SL(E)$ est un sous groupe distingué de $GL(E)$ isomorphe à $SL_n(K)$, (qui est aussi distingué dans $GL_n(K)$), le groupe $GL(E)$ est isomorphe à $K^* \times SL(E)$.

Thm. 6: On a $Z(GL(E)) = K^* \cdot \text{Id}$ et $Z(SL(E)) = \mu_n(K) \cdot \text{Id}$ où $\mu_n(K)$ est l'ensemble des racines n -èmes de l'unité de K .

II - Etude du groupe $GL(E)$.

a) Dilatation et translation

Prop. / Def. 7: Soit u un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tq $u|_u = \text{Id}_u$. Les ASSE:

- (i) $\det(u) = \lambda \neq 1$ (i.e. $u \notin SL(E)$) (donc une droite propre D pour λ)
- (ii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable
- (iii) $\text{Im}(u - \text{Id}) \subseteq u$
- (iv) Il existe une base tel que la matrice de u est $\begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in K^*$ et $\lambda \neq 1$.

On dit alors que u est une dilatation d'hyperplan u , de droite D et de rapport λ .

On a $D = \text{Im}(u - \text{Id})$, $u = \ker(u - \text{Id})$.

Si $\lambda = -1$ et $\dim(K) \neq 2$ u est appelée réflexion.

Prop. / Def. 8: Soit u un hyperplan de E d'équation $p \in E^*$ ($u = \ker(p)$, $p \neq 0$)

Soit $u \in GL(E)$, $u \neq \text{Id}$ tq $u|_u = \text{Id}_u$. Les ASSE:

- (i) $\det(u) = 1$ (i.e. $u \in SL(E)$)
- (ii) u n'est pas diagonalisable
- (iii) $D = \text{Im}(u - \text{Id}) \subseteq u$
- (iv) $u = \frac{p}{u} \rightarrow \frac{p}{u}$ est l'identité de $\frac{p}{u}$
- (v) $\exists \alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ tq $\forall x \in E$, $u(x) = x + \alpha p(x)u$.
- (vi) Il existe une base tq la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

On dit alors que u est une translation d'hyperplan u et de droite D .

On a $D = (a)$ et $D \subseteq u$.

Prop. 3: Soit $u \in GL(E)$, $u \neq \text{Id}$. u est une translation de droite D si $u|_u = \text{Id}$ et $u = \frac{p}{u} \rightarrow \frac{p}{u}$ est l'identité.

Prop. 10: Soit u une translation de droite D et d'hyperplan u et soit $u \in GL(E)$. Alors $u|_D u^{-1}$ est une translation de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(u)$.

Thm. 4: Les translations engendrent $SL(E)$.

Cor. 12: Les translations et dilatations engendrent $GL(E)$.

Prop. 13: 2 dilatations sont conjuguées dans $GL(E)$ si elles ont même rapport.

Prop. 14: 2 translations sont conjuguées dans $GL(E)$. Pour $n \geq 3$ elles le sont aussi dans $SL(E)$.

Prop. 15: Dans $SL_2(K)$ toute translation est conjuguée d'une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in K^*$.

Soient $\lambda, \mu \in K^*$ alors $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjugués dans $SL_2(K)$ si $\frac{\lambda}{\mu}$ est un carré dans K .

c) Centres, groupes projectifs, groupes dérivés

Thm. 16: Le centre $Z(GL(E)) = \{u \in GL(E) \mid uv = vu \forall v \in GL(E)\}$ est formé des homothéties $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in K^*$. Donc $Z(GL(E)) \cong K^*$. Le centre de $SL(E)$ est $Z(GL(E)) \cap SL(E)$ et est isomorphe à $\mu_n(K) = \{\lambda \in K \mid \lambda^n = 1\}$.

[RMS
p. 125
- 128

[RMS
p. 124

[RMS
p. 96
- 101

Def. 17: Le quotient de $GL(E)$ par son centre est appelé groupe projectif linéaire et est noté $PGLE$. De même on note $PSPE$ le quotient de $SP(E)$ par son centre. On note $PSL_n(K)$ et $PSp_n(K)$ les quotients des groupes matriciels correspondants.

Thm. 18: $D(GL_n(K)) = SP_n(K)$ sauf si $n=2$ et $K = \mathbb{F}_2$
 2) $D(SP_n(K)) = SP_n(K)$ sauf si $n=2$, $K = \mathbb{F}_2$ et $n=2$, $K = \mathbb{F}_3$.

Thm. 19: $PSL_n(K)$ est simple sauf si $\begin{cases} n=2, K = \mathbb{F}_2 \\ n=2, K = \mathbb{F}_3 \end{cases}$

Thm. 20: $GL_2(\mathbb{F}_2) = SP_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ et $DSP_2(\mathbb{F}_2) \simeq A_3$.

d) Quelques cardinalités: p un nombre premier et $q = p^2$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$

Dans cette partie $K = \mathbb{F}_q$

Prop. 21: 1) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$

2) $|SP_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \dots (q^n - q^{n-2}) q^{n-1}$

3) $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SP_n(\mathbb{F}_q)|$

4) $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SP_n(\mathbb{F}_q)|}{\text{pgcd}(n, q-1)}$

Def. 22: On note DPE l'ensemble des automorphismes de E diagonalisables.

Thm. 23: $|DPE| = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_r = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{m_1}(\mathbb{F}_q)| \dots |GL_{m_r}(\mathbb{F}_q)|}$

III. Action sur $GL(E)$

a) Action par translation

Thm. 24: Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On considère l'action du groupe $GL_n(K)$ par multiplication à gauche sur l'espace $M_{m,n}(K)$. Alors:

(i) 2 matrices A et A' de $M_{m,n}(K)$ sont dans la même orbite sous cette action si elles ont même noyau (i.e. $\exists P \in GL_n(K), A' = PA \Leftrightarrow \text{Ker } A = \text{Ker } A'$)

(ii) Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite on lignes.

Rem. 25: On a un résultat analogue pour la multiplication à droite. Mais cette fois-ci l'inverse est l'image.

Def. 26: On appelle matrice de dilatation $D_i(\alpha)$ où $\alpha \in K$ et $1 \leq i \leq p$ ty $D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

Def. 27: On appelle matrice de translation $T_{i,j}(\beta) = I_n + \beta E_{ij}$ où $E_{ij} \in M_n(K)$ d. $\beta \in K$.

Def. 28: On appelle matrice de permutation pour $1 \leq i, j \leq n$

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (0) \\ \vdots \\ (0) \end{matrix}$$

Opération	$D_i(\alpha) A$	$T_{i,j}(\beta) A$	$P_{i,j} A$
Résultat	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

Opération	$A D_i(\alpha)$	$A T_{i,j}(\beta)$	$A P_{i,j}$
Résultat	$C_i \leftarrow \alpha C_i$	$C_j \leftarrow C_j + \beta C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

b) Actions par équivalences

Def. 29: On définit l'action d'équivalence de $GL_n(K) \times GL_n(K)$ sur $M_{m,n}(K)$ par $((GL_n(K) \times GL_n(K)), M_{m,n}(K)) \rightarrow M_{m,n}(K)$

$$(P, Q), A \mapsto PAQ^{-1}$$

2 matrices dans la même orbite pour cette action sont dites équivalentes.

Thm. 30: Deux matrices $A, B \in M_{m,n}(K)$ sont équivalentes si:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$$

Rem. 31: Un représentant pour chaque orbite est $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} (0) \\ \vdots \\ (0) \end{matrix}$

c) Action par conjugaison $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def. 32: L'action par conjugaison de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ est

$$(GL_n(K), M_n(K)) \rightarrow M_n(K)$$

$$(P, A) \mapsto PAP^{-1}$$

Deux matrices dans la même orbite sont dites conjuguées

Thm. 33: Deux matrices $A, B \in M_n(K)$ sont conjuguées si elles ont même spectre et pour tout λ dans le spectre $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = \dim(\text{Ker}(B - \lambda I))$

[CA2]
p.250
-251

1) Action par congruence

Def.34: L'action par congruence de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ est
 $(GL_n(K), S_n(K)) \rightarrow S_n(K)$
 $(P, A) \mapsto PA^tP$

Deux matrices dans la même orbite sont dites congruente

Def.35: Pour q une forme quadratique et A la matrice de q dans une certaine base. On définit $p(A) := \max \{ \dim F \mid F \subseteq E, \forall x \in F, q(x) = 0 \}$
 où E est un K-ev.

Thm.36: (1) Si $K = \mathbb{C}$, 2 matrices sont congruente si elles ont même rang
 (2) Si $K = \mathbb{R}$, 2 matrices sont congruente si elles ont même rang et même invariant p (ie même signature)
 (3) Si $K = \mathbb{F}$, 2 matrices sont congruente si elles ont même déterminant dans $\mathbb{F}_q^*$
 $(\mathbb{F}_q^*)^2$.

[CA2]
p.254

IV Groupe orthogonal

(E, <, >) un espace Euclidien.

Def.37: On appelle isométrie de E un élément u de $GL(E)$ tq
 $\forall x, y, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E. On note $O^+(E) = O(E) \cap SL(E)$

Prop.38: $O(E) \simeq O_n(\mathbb{R}) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n \}$
 $O^+(E) \simeq O_n^+(\mathbb{R}) := \{ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$

Thm.39: $Z(O(E)) = \{ \pm Id \}$ et $Z(O^+(E)) = \{ Id \}$ si m pair
 $\{ \pm Id \}$ sinon

Def.40: Le groupe projectif orthogonal est $PO(E) = O(E) / \{ \pm Id \}$ et on pose
 $PO^+(E) = O^+(E) / \{ Id \}$. De manière analogue on définit $PO_n(\mathbb{R})$ et $PO_n^+(\mathbb{R})$

Thm.41: $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Si $u \in O(E)$ alors u est produit d'au plus n réflexions.

Thm.42: Pour $n \geq 3$, $O^+(E)$ est engendré par les renversements

Def.43: Soit $u \in GL(E)$ tq $u^2 = Id$. Il existe E^- et E^+ tq:
 $E = E^- \oplus E^+$ et $u|_{E^+} = Id$ et $u|_{E^-} = -Id$. Choisissons une base de la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$. Si $\dim E^- = 1$ (resp. 2) alors on dit que u est une réflexion (resp renversement)

[CPERS]
p.125

Prop.44: Pour $n \geq 2$, $D(O(E)) = O^+(E)$ et pour $n \geq 3$, $D(O^+(E)) = O^+(E)$

V Topologie de $GL(E)$ $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

Thm.45: $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$ et $u \mapsto u^{-1}$ est continue

Thm.46: $O(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$.

Thm.47: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Thm.48: $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs

Thm.49: $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^+(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs et sont des composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme.50: Pour tout $S \in SL_n(\mathbb{R})$, $\|S\|_2 = |\rho(S)|$

Thm.51: exp: $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^+(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Références:

[CA2]: Rembault, algèbre et géo.
 [CPERS]: Perrin, Cours d'algèbre
 [CA2]: Cullis, Nouvelle -- (1er ed) T1

[CPERS]
p.118
[CA2]
p.253
[CPERS]
p.126
[CA2]
p.632
[CPERS]
p.351
[CA2]
p.357
[CPERS]
p.125