NOM : MAURAS Prénom : Simon Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Autre sujet : 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Définitions et généralités

Def 1 Soit (u_n) une suite à valeur dans $\mathbb{K}$. On note $\sum_{n\geq 0} u_n$ la série définie par

$$\begin{cases} S_0 = u_0 \\ \forall N \in \mathbb{N},\ S_{N+1} = S_N + u_{N+1} \end{cases}$$

On note note $\sum_{n=0}^{N} u_n$ le terme S_N.

Exemple 2 (Série géométrique) Soit $q \in \mathbb{K}\setminus\{1\}$

$$\forall N \in \mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Def 3 On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge dans $\mathbb{K}$. On note $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ la suite des restes.

Prop 4 (Critère de Cauchy) $\mathbb{K}$ étant complet, une série converge ssi c'est une suite de Cauchy.

$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\iff \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\left|\sum_{i=0}^{n+p} u_n - \sum_{i=0}^{n} u_n\right|}_{\sum_{i=n+1}^{n+p} u_n} < \varepsilon$$

Def 5 (Convergence absolue) $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Prop 6 Une série absolument convergente converge.

Exemple 7 Pour tout $q \in \mathbb{K}$ tel que $|q|<1$. La série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge absolument.

II) Outils de comparaison

a) Séries à termes positifs (dans $\mathbb{R}^+$)

Prop 8 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs.

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 0} u_n \text{ bornée.}$$

Prop 9 Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ à termes positifs.

Si $v_n \overset{+\infty}{=} O(u_n)$ alors $\left(\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge}\right)$

Si $v_n \overset{+\infty}{\sim} u_n$ alors :

- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge
$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \overset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N}^{+\infty} v_n \quad \text{(restes)}$$
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge
$$\sum_{n=0}^{N} u_n \overset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{N} v_n \quad \text{(sommes partielles)}$$

Exemple 10 Soit $q \in]0,1[$.

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \ln(1+q^n) \overset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}$$

DEV 1

Prop 11 (Comparaison série intégrale)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante.

Alors $\sum_{n=0}^{N} f(n) - \int_0^N f(t)\,dt$ converge.

Donc $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et $\left(\int_0^N f(t)\,dt\right)_N$ ont la même nature :

- Si l'une converge, l'autre aussi et les restes sont équivalents.
- Si l'une diverge, l'autre aussi et les sommes partielles sont équivalentes.

Développement 1 (Série harmonique)

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Prop 12 (Formule Euler MacLaurin)

B_n polynômes de Bernoulli, b_n nombres de Bernoulli

Soient $m < n$ entiers, $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ de classe C^r.

$$f(m) + \dots + f(n) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(m) + f(n)) + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k}\left[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right] + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,dt$$

Exemple 13 Développement asymptotique de H_n à un ordre quelconque

Exemple 14 (Séries de Bertrand)

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

La série de Bertrand converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Prop 15 (Règle D'Alembert)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes positifs (strictement) telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$

- Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge
- Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge

Prop 16 (Règle de Duhamel) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{1 + a/n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}^+$$

Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$

Prop 17 (Règle de Cauchy) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \qquad \lambda \in [0, +\infty]$$

- Si $\lambda < 1$ $\sum u_n$ diverge
- Si $\lambda > 1$ $\sum u_n$ converge

Exemples 18

- $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$
- $\sum_{n\geq 1} \left(\lambda + \frac{1}{n}\right)^n$

(b) Semi convergence

Def 19 Une série est semi-convergente lorsqu'elle est convergente mais pas absolument convergente.

Prop 20 (Critère spécial séries alternées)

Soit (a_n) une suite décroissante, à termes positifs, tendant vers 0.

$\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ converge et $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n\right| \leq a_{N+1}$

Prop 21 (Transformation d'Abel)

Soit $u_n = \alpha_n v_n$ (pour tout n)

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

(c) Convergence commutative

On note $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\mathbb{N}$

Prop 22 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série (dans $\mathbb{K}$)

$\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge.

Prop 23 (Théorème de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ réelle semi convergente

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$$

III Applications

a) Théorème de Müntz

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$.

$\forall f, g \in \mathcal{C}, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$

$\forall f \in \mathcal{C} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

C'est un espace vectoriel préhilbertien.

On note $x^\alpha = (x \mapsto x^\alpha)$

Prop 24 (Approximation de Weierstraß)

$\mathrm{Vect}(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathcal{C}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ donc pour $\|\cdot\|_2$

DEV 2

Développement 2 (Müntz)

$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement décroissante de réels strictement positifs

$\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dense dans $\mathcal{C}$

$\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\alpha_i - n}{\alpha_i + n + 1} \right| = 0$

$\iff \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge

b) Séries entières

Def 25 (Série entière) Série de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$.

Def 26 (Rayon de convergence)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière

$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{suite } (|a_n| r^n)_n \text{ bornée}\}$

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R$ convergence absolue
- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R$ divergence.

Prop 27 (Analyse complexe) (i) $\iff$ (ii)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$

(i) f développable en série entière en tout point de U

(ii) $\forall z \in U$, $\lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ existe

Remarque 28 Nombreuses conséquences :

- En analyse complexe (Formule de Cauchy)
- En dénombrement (Série génératrice)

Exemple 29 (Nombre de Catalan)

C_n nombre d'expressions bien parenthésées de taille n. $\quad C_n = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$

c) Séries de Fourier

On considère l'ensemble des fonctions 2π périodiques continues par morceaux

Produit scalaire de f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$

Prop 30 Les polynômes trigonométriques forment une base hilbertienne $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Def 31 (Coefficient de Fourier)

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

Prop 32 (Egalité de Parseval)

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

On en déduit la convergence en norme 2 pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.