230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielle des séries numériques - Exemples.

Toutes les suites considérées seront à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Séries numériques et convergence

1. Définitions

déf 1 : Soit $(a_n)_n$ une suite. La série de terme général a_n, notée $\sum_{n\geq 0} a_n$, est la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On appelle alors $S_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k$, la somme partielle d'ordre n de la série.

ex 2 : La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ vérifie $S_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$

déf 3 : • La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est dite convergente si $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$ converge. On note alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sa limite.
• On dit que la série diverge si elle ne converge pas.

ex 4 : La série $\sum_{n\geq 0} n$ diverge.

prop 5 : Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, alors $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

ex 6 : Série géométrique : pour $q\in\mathbb{C}$, $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge ssi $|q|<1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

déf 7 : Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, on note, pour $n\in\mathbb{N}$,
$R_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k - S_n$, le reste partiel d'ordre n de la série.
On a : $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

ex 8 : Si $0\leq|q|<1$, pour $\sum_{n\geq 0} q^n$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

2. Critère de Cauchy et convergence absolue

déf 9 : Une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ vérifie le critère de Cauchy lorsque :
$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall p\geq q\geq N \quad \left|\sum_{k=q}^{p} a_k\right| < \varepsilon$.

ex 10 : $\sum_{n\geq 0} 1$ ne vérifie pas le critère de Cauchy.

prop 11 : Une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge ssi elle vérifie le critère de Cauchy.

déf 12 : Une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est dite absolument convergente lorsque la série $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ converge.

ex 13 : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{5n+2}}$ converge absolument.

prop 14 : Une série absolument convergente est convergente.

prop 15 : Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge absolument, alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ converge absolument et alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

3. D'autres critères de convergence

prop 16 : Une série de terme général réel positif converge ssi ses sommes partielles sont bornées.

rem 17 : $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ a ses sommes partielles bornées mais ne converge pas.

prop 18 : Soient $(a_n),(b_n)$ deux suites réelles telles que : $\forall n\ 0\leq a_n\leq b_n$.
(on peut aussi considérer l'inégalité à partir d'un certain rang).
• si $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge, $\sum_{n\geq 0} b_n$ aussi.
• si $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} a_n$ aussi.

ex 19 : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n 2^n}$ converge car $0\leq\frac{1}{n2^n}\leq\frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge.

prop 19 : Soient $(a_n),(b_n)$ réelles telles que à partir d'un certain rang $0<a_n,b_n$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$.
• Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge, $\sum_{n\geq 0} b_n$ aussi.
• Si $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} a_n$ aussi.

ex 20 : $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$ converge (comparer à la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$).

4. Transformation d'Abel

<u>prop 21</u> : Soit $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites telles que
- $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k$ définie une suite bornée.
- $b_n \to 0$ en décroissant.

Alors $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

<u>exemple 22</u> : Pour $\alpha>0$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

<u>rem 23</u> : On peut calculer a_n à partir de S_n, selon : $a_n = S_n - S_{n-1}$.

II. Estimation des sommes partielles, des restes partiels, vitesse de convergence

1. Séries alternées.

<u>déf 24</u> : Une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est dite alternée lorsque $(-1)^n a_n$ garde un signe constant. (ici $a_n \in \mathbb{R}$)

<u>ex 25</u> : $\sum_{n\geq 0} (-1)^n n$ est alternée. Elle ne converge pas.

<u>prop 26</u> :
- Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ est alternée et que de plus $|a_n|$ décroît vers 0, alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.
- On a alors : $\forall n \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| \leq |a_n|$.

<u>ex 27</u> : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leq 1/k$.

<u>ex 28</u> : Pour $x \geq 0$ et $n \geq x$, $\left|e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

2. Comparaison avec une intégrale

<u>prop 29</u> : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ~~décroissante~~. Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt\right)_n$ converge, ie $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_n$ ont même nature.

<u>exemple 30</u> : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$ converge ssi $\alpha > 1$. On a :
- $\sum_{k=n}^{\infty} 1/k^\alpha \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$
- $\sum_{k=0}^{n} 1/k^\alpha \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$.

<u>prop 30</u> : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ C^1 telle que $f' \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt\right)_n$ converge ie $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_n$ ont même nature

<u>exemple 31</u> : Soit $\alpha > 0$. $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1/2$.

D
V
P
M
T
1

3. Comparaison avec une série à terme général positif.

<u>prop 32</u> : Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites telles que
- $a_n \in \mathbb{R}^+$ à partir d'un certain rang.
- $b_n = o(a_n)$.

Alors 1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right)$$
2. Si $\sum_{n\geq 0} b_n$ diverge, $\sum_{n\geq 0} a_n$ aussi et
$$\sum_{k=0}^{n} b_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$$

<u>exemple 33</u> : $\sum_{k=1}^{n} 1/k = \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} + o(1/n)$ où $\gamma \in \mathbb{R}$.

<u>rem 34</u> : On a des résultats similaires avec O et $\sim$

<u>application 35</u> : Soit $q_0 = 2$ et $q_{n+1} = q_n^{q_n}$ pour $n \geq 1$. Alors $\sum_{n\geq 0} 1/q_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} 1/q_n \notin \mathbb{Q}$.

D
V
P
M
T

<u>application 36</u> : $e \notin \mathbb{Q}$.

<u>application 37</u> : Il existe des nombres transcendants. En particulier $\sum_{n\geq 0}^{\infty} 10^{-n!}$ est transcendant.

2

OUBLI (II.2) <u>prop 38</u> : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge $\Leftrightarrow (\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

cor 39 : Si (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)_n$ converge vers ℓ.

II. Théorème de Fubini et produit de Cauchy.

prop 40 : Soient $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ telle que l'un des deux points suivants est vrai :

- $\forall m$ $\sum_{n\geq 0} u_{n,m}$ converge absolument et $\sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|$ converge
- $\forall n$ $\sum_{m\geq 0} u_{n,m}$ converge absolument et $\sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|$ converge

Alors l'autre point est vérifiée et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}$$

prop 41 : Sous les même hypothèses, en posant $c_n = \sum_{p=0}^{n} u_{p,n-p}$ on a $\sum_{n\geq 0} c_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}.$$

application 42 : Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{m\geq 0} b_m$ sont absolument convergente alors $\sum_{n\geq 0}\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ aussi et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

exemple 43 : Pour $x,y \in \mathbb{C}$, $e^{x+y} = e^x e^y$.

application 44 : Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont absolument convergentes, alors il existe $(c_n)_n$ telle que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.