NOM : IZIQUEL Prénom : Lucas Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 229- Fonctions monotones, fonctions convexes. Exemples & applications

Autre sujet :

## I. Fonctions croissantes

Dans toute cette partie, $I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$

### 1) Définition générale

Déf 1 . $f : I \to \mathbb{R}$ est dite croissante si $\forall (x,y) \in I^2$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

. De même $f$ décroissante si $\forall x \leq y$ $f(x) \geq f(y)$

. $f$ strictement croissante (resp ↘) si l'inégalité est stricte

Proposition 2 $f \nearrow \Leftrightarrow -f \searrow$

Rq 3 $f \searrow$ et $f \nearrow \Rightarrow f$ constante sur $I$

Exemples 4 . $k > 0$ $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}_+$ ↗

. $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

. si $f \geq 0$, $x \mapsto \int_0^x f$ sur $\mathbb{R}_+$.

. $f$ fonction de répartition d'une va réelle.

### 2) Espace des fonctions monotones

Prop 5 {fonctions croissantes} cône convexe (stable par somme et multiplication par un scalaire positif)

Cor 6 $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs ↗ sur $\mathbb{R}_+$.

Prop 7 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes. Alors (sous réserve d'existence) $\lim_n f$ et $\sup_n f$ sont ↗. (limite simple).

Exercice 8 (Thm Dini) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n$ $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ↗ qui CS vers $f \in C^0_{[a,b]}$. Alors $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ pour $\|.\|_\infty$.

Déf 9 . $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle variation totale de $f$ sur $I$ $V_I(f) := \sup_\sigma \sum_0^{m-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ où $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$

où $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ est une subdivision de $[a,b]$ (où $m \in \mathbb{N}^*$)

. $f$ est dite à variation bornée si $V_I(f) < +\infty$

Thm 10 $f$ est à var bornée ssi $\exists u, v : I \to \mathbb{R}$ croissantes telles que $f = u - v$

Cor 11 vect({fonctions monotones}) = {fonctions à var bornée}

Ex 12 $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.

### 3) Monotonie et continuité

Prop 13 $f \in C^0(I, \mathbb{R})$. On a $f$ injective $\Leftrightarrow f$ strictement monotone.

Thm 14 $f \nearrow$ sur $]a,b[$, alors $\forall (x,y) \in ]a,b[^2$ $x < y$, les limites à gauche et à droite de $f$ existent en $x$ et $y$, et $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) \leq f(y^-)$

Prop 15 L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Rq 16 cet ensemble peut être dénombrable dense. exemple : si $(a_n)_n$ numérotation de $\mathbb{Q}$ et $x \mapsto \sum_{x > a_n} 2^{-n}$

Application 17 $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante admet un point fixe.

### 3) Monotonie et dérivabilité

Prop 18 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$, alors $f' \geq 0 \Rightarrow f$ ↗

Rq 19 Escalier de Cantor : $f' = 0$ sur un ensemble de mesure pleine sur $[0,1]$, mais $f$ croît de 0 à 1

Thm 20 (Admis, Lebesgue) $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est dérivable presque partout.

Rq 21 Vrai aussi pour $f$ à variation bornée.

## II. Fonctions convexes

Dans cette partie, $D \subset E$ convexe ($E$ $\mathbb{R}$-evn) et $I \subset \mathbb{R}$ intervalle

### 1) Définition

Déf 22 . $f$ est convexe sur $D$ si $\forall (x,y) \in D^2$ $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

. $f$ est concave si $-f$ est convexe.

. (strictement si l'inégalité est stricte)

1/4

**Prop 23** $f$ convexe $\Leftrightarrow$ $\forall (x_1,\dots,x_m)\in D^m$ et $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in \mathbb{R}_+^m$ tels que $\sum \lambda_i = 1$, on a $f\left(\sum_1^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_1^m \lambda_i f(x_i)$

**Déf 24** On appelle épigraphe de $f$ $epi(f) := \{(x,y)\in D\times\mathbb{R} \mid f(x)\leq y\}$

**Prop 25** $f$ convexe $\Leftrightarrow$ $epi(f)$ est un convexe de $E\times\mathbb{R}$.

**Exercice 26** . En admettant $\sin$ concave sur $[0,\pi/2]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$
. $x\mapsto x^2$ $(\mathbb{R})$ sur $E$ evn, $x\mapsto \|x\|$.

**Proposition 27** (cas réel)
Soit pour $x_0\in I$ $p_{x_0}: x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $I-\{x_0\}\to\mathbb{R}$.

Alors $f$ convexe $\Leftrightarrow$ $\forall x_0\in I$ $p_{x_0}$ croissante.

**Exercice 28** . $f$ convexe sur $\mathbb{R}^+$, alors $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
. $f$ convexe majorée $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est constante.

**Proposition 29** Inégalité des 3 pentes (schéma 1)
CNS pour avoir $f$ convexe sur $I$.

2) Ensemble des fonctions convexes

**Prop 30** L'ensemble des fonctions convexes $D\to\mathbb{R}$ est un cône convexe.

**Prop 31** Une limite simple de fonctions convexes est convexe
une borne sup de fonctions convexes est convexe

3) Régularités des fonctions convexes

**Proposition 32**
$f: D\to\mathbb{R}$ convexe est continue sur $\mathring{D}$.

**Rq 33** . sur $\mathring{D}$ seulement. Contre exemple : $1_{\{0,1\}}$ sur $[0,1]$.

**Proposition 33** $f: I\to\mathbb{R}$ convexe admet des dérivées à droite et à gauche en tout point de $I$.

**Ex 34** $x\mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$

**Thm 35** Soit $f: I\to\mathbb{R}$ dérivable.
$f$ convexe $\Leftrightarrow$ $f'$ $\nearrow$ sur $I$ $\Leftrightarrow$ la courbe de $f$ est au dessus de toutes ses tangentes.

**Ex 36** $x\mapsto e^x$ convexe sur $\mathbb{R}$, et $e^x\geq x+1$
$x\mapsto \ln x$ concave, sur $\mathbb{R}_+^*$ $\ln x \leq x-1$

**Proposition 37**
$f$ deux fois dérivable sur $\mathring{D}$
alors $f$ convexe $\Leftrightarrow$ $d^2f\geq 0$ sur $\mathring{D}$
(sur $\mathbb{R}$, cela équivaut à $f''\geq 0$ sur $I$).

## III. Applications de la monotonie et de la convexité

1) Inégalités de convexité

**Proposition 38** (Inégalité arithmético-géométrique)
Soit $(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}_+^{*n}$, alors $(x_1\cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$

**Application 39** $(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^{*3}$ montrer que $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8} \geq abc$ | Inégalité de Hadamard.

**Proposition 40** (Hölder & Minkowski)
Soit $(p,q)\in\mathbb{R}_+^{*2}$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$. Pour $(X,\mu)$ espace mesuré et $f,g$ positives mesurables on a
$\int_X fg\,d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q$, et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

**Prop 41** (Jensen)
$\varphi: I\to\mathbb{R}$ convexe. $f:[0,1]\to I$ mesurable. Alors
$\int_0^1 \varphi(f) \geq \varphi\left(\int_0^1 f\right)$ (Avec la caractérisation $f: D\to\mathbb{R}$ convexe $\Leftrightarrow$ $f$ est l'inf d'une famille de fonctions affines)

2) Systèmes dynamiques : EDO et suite récurrentes

**Exercice 42** (E) : $y''+qy=0$ où $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue strictement négative sur $\mathbb{R}$.
Par 28, la seule solution non bornée de (E) est 0 et toute fonction solution non nulle s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 43** (suite récurrente réelle). Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}$ $(u_n)$ définie par
$\begin{cases} u_0 = x_0\in[a,b] \\ u_{n+1} = f(u_n)\end{cases}$ où $f:[a,b]\to[a,b]$

- Si $f$ croissante, $(u_n)$ est monotone.
- si $f \searrow$, $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones.
- soit $\lambda_1 < \lambda_2$ deux points fixes consécutifs de $f$ croissante continue, et $x_0 \in ]\lambda_1, \lambda_2[$. Alors $u_n \nearrow \lambda_2$ si $f(x) \geq x$ sur $]\lambda_1, \lambda_2[$
$u_n \searrow \lambda_1$ si $f(x) < x$ sur $]\lambda_1, \lambda_2[$

DEVELOPPEMENT 1

**Application 44** (Processus de Galton-Watson).

$(\xi_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$ vaiid $L^1$.

$Z_n$ suite définie par $\begin{cases} Z_0 := 1 \\ Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} \end{cases}$

$m := \mathbb{E}[\xi_1^{(0)}]$.

On définit l'événement "extinction" par $ext := \{\exists n \geq 0, Z_n = 0\}$

- Si $m \leq 1$ et $\mathbb{P}(\xi_1^{(0)} = 1) < 1$, alors $\mathbb{P}(ext) = 1$
- si $m > 1$ ou $\mathbb{P}(\xi_1^{(0)} = 1) = 1$, alors $\mathbb{P}(ext) \in [0, 1[$.

## 3) Etude de séries et d'intégrales

**Proposition 45** - Comparaison série - intégrale.

$f : I \to \mathbb{R}$ intégrable mesurable croissante, alors si $(k, n) \in I^2$

$$\sum_{i=k}^{n-1} f(i) \leq \int_k^n f \leq \sum_{i=k+1}^{n} f(i)$$

**Exemple 46** étude de la série harmonique

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

4) Optimis

## 4) Optimisation et fonction convexes

**Proposition 45** $f : D \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Alors il existe au plus un point de $D$ minimisant $f$.

DVPT 2

**Application 46** (Ellipsoïde de John).

Soit $K$ compact de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \mathring{K}$. Alors il existe un unique ellipsoïde de taille minimale contenant $K$.

**Application 47** Tout sous groupe compact de $GL(E)$ est conjugué à $O(E)$ (en dimension finie).

## 5) Log convexité

**Déf 48** $f : D \to \mathbb{R}_+^*$ est dite log convexe si $x \mapsto \log f(x)$ est convexe.

**Prop 49** $f : E \to \mathbb{R}_+^*$
- $f$ log convexe $\Rightarrow$ $f$ convexe
- $f$ log convexe $\Leftrightarrow$ $x \mapsto f(x) c^x$ convexe $\forall c > 0$
- $f, g$ log convexes $\Rightarrow$ $f+g$ log convexe.

**Exercice 50**
- $M \mapsto \det(M)$ est log-convexe sur $HDP_n$
- $\Gamma$ est log convexe où $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

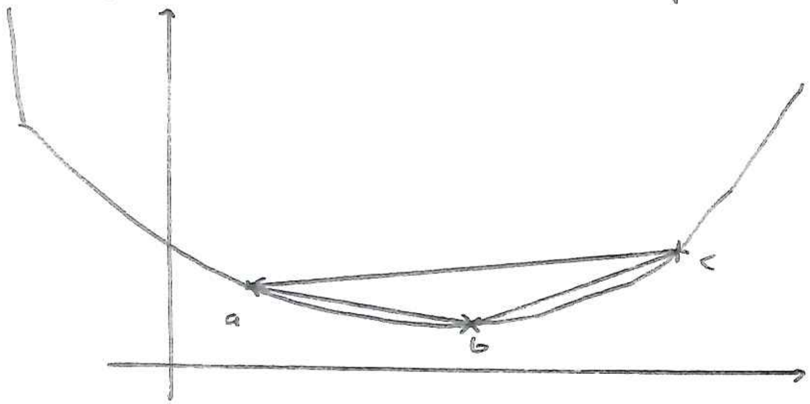
**Exercice 51** $\Gamma$ est la seule fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant

(i) $f(1) = 1$

(ii) $\forall x > 0 \quad f(x+1) = x f(x)$

(iii) $f$ est log convexe.

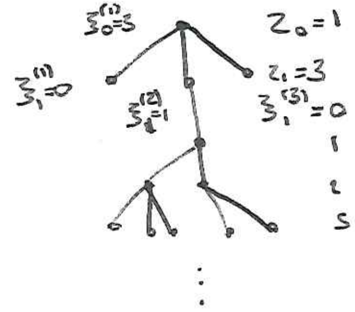
Fig 1 : f convexe I→ℝ, inégalité des 3 pentes




$\forall\, a<b<c$

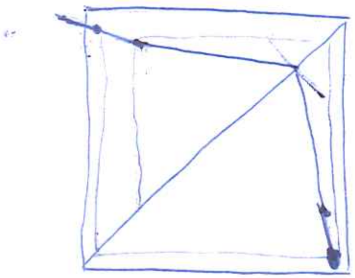
$$\frac{f(c)-f(b)}{b-c} \geq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Galton Watson

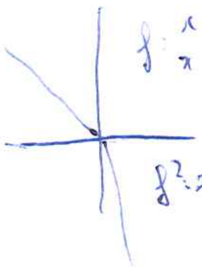



$\xi_0^{(1)}$ : nb de descendants directs de (i)

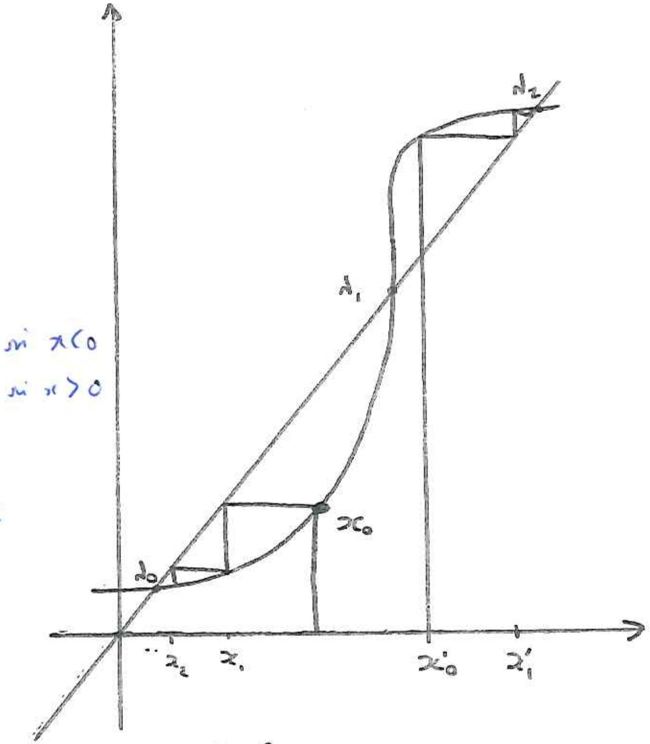
figure 2 $x_{m+1}=f(x_m)$



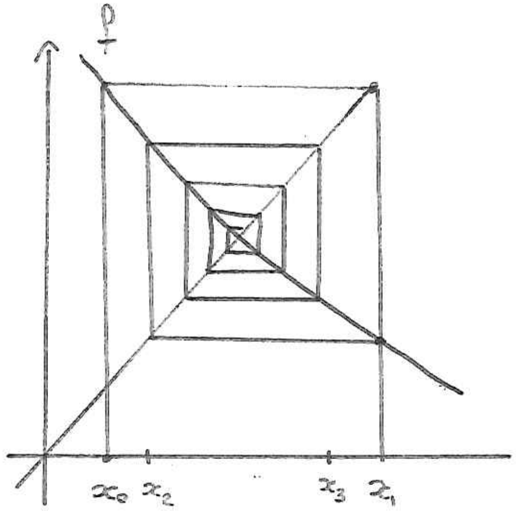
$f$ : $x \mapsto -x$ si $x<0$
$x \mapsto -2x$ si $x>0$



$f^2 : x \mapsto 2x$




$x_m \searrow \lambda_0$
$x'_m \nearrow \lambda_2$




$(x_{2m}) \nearrow \lambda$
$(x_{2m+1}) \searrow \lambda$


4/4