223 — Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

ONFROY Xavier

Références : Analyse, Gourdon ; Oraux X-ENS, Cassini ; PGCD Rombaldi

Dans toute la suite, (E,d) et (E',d') désigneront des espaces métriques.

I) Généralités sur les suites

I.1) Définitions

Déf 1 : Une suite u à valeurs dans E est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Pour $n\in\mathbb{N}$, $u(n)$ sera appellé "n-ième terme de u" et sera noté u_n. On notera aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ la suite u.

Exemples 2 : • $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ • $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ • $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Déf 3 : • Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E est dite convergente vers un élément $\ell\in E$ lorsque

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N,\ d(u_n,\ell)<\varepsilon$$

• Si $(u_n)_n$ ne converge vers aucun élément de E, la suite est dite divergente.

Exemples 4 : • $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
• $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dans $\mathbb{R}$.
• $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dans $\mathbb{R}$.
• $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dans $\mathbb{R}$.

Th/déf 5 : Si une suite $(u_n)_n$ converge dans E, alors c'est vers un unique élément de E. Cet élément est appellé "limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$" et est noté $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 6 : Montrer que si $(u_n)_n$ converge dans E, alors pour toute permutation $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(u_{\sigma(n)})_n$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\sigma(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Définition 7 : • Une extractrice est une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ qui est strictement croissante.
• Une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une extractrice.
• Une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ est un élément $\ell\in E$ vers lequel une sous-suite de $(u_n)_n$ converge.

Prop 8 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E et si $\ell\in E$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :
• ℓ est une valeur d'adhérence de u
• $\forall\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N, d(\ell,u_n)<\varepsilon$
• $\forall\varepsilon>0, \{n\in\mathbb{N}\mid d(u_n,\ell)<\varepsilon\}$ est infini
• $\ell\in\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n\,;\,n\geq p\}}$

Exemples 9 : • 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de $((-1)^n)_n$ dans $\mathbb{R}$.
• $(n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.

I.2) Caractérisation séquentielle de notions topologiques

Prop 10 : Si $A\subseteq E$, alors $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes dans E à valeurs dans A.

Exemple 11 : $\overline{\{\frac{1}{n}\,;\,n\in\mathbb{N}^*\}} = \{0\}\cup\{\frac{1}{n}\,;\,n\in\mathbb{N}^*\}$

Cor 12 : $A\subseteq E$ est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

Cor 13 : tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Prop 14 : Une application $f:(E,d)\to(E',d')$ est continue en $\ell\in E$ si et seulement si

$$\forall (u_n)_n\in E^{\mathbb{N}},\quad \lim_{n\to\infty} u_n=\ell \implies (f(u_n))_n \text{ converge vers } f(\ell).$$

Exemple 15 : $x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0.

Application 16 : Si $A\subseteq E$ est dense dans E et si $f:A\to E'$ est continue, si $\forall a\notin A$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ existe, alors f s'étend à E en une unique application continue $\overline{f}:E\to E'$.

Th 17 (Bolzano-Weierstrass) :
E est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans E a une valeur d'adhérence.

Cor 18 : Toute suite réelle à valeurs dans un segment $[a,b]$ a une valeur d'adhérence. Si cette valeur d'adhérence est unique, alors la suite converge vers elle.

Cor 19 : Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.

II.2) Liminf et Limsup

Déf 41 : si $(u_n)_n$ suite réelle, alors on pose $\sup_m u_n = \sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$, $\inf_m u_n = \inf\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$

th/déf 42 : si $(u_n)_n$ suite réelle, alors $\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k$ sont bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$.

prop 43 : • si $(u_n)_n$ est croissante, $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \sup_m u_n$.
• si $(u_n)_n$ est décroissante, $\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \inf_m u_n$

prop 44 : si $(u_n)_n$ est une suite réelle, $\liminf_{n\to\infty} u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$; $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est la plus grande.

exemple 45 : • $\liminf_{n\to\infty} \sin(n) = -1$; $\limsup_{n\to\infty} \sin(n) = 1$

prop 46 : $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$

II.3) Opérations sur les limites et suites remarquables

Déf 47 : On étend les opérations $+, \times, -$ et $\div$ à $\overline{\mathbb{R}}$ à l'exception des expressions $0\times\infty$, $\infty\times 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$.

th 48 : Les quatre opérations passent à la limite (de suites réelles), sauf dans les quatre cas précédents.

Application 49 : Si une suite réelle $(u_n)_n$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers α.

Rem 50 : La réciproque est fausse : prendre $(u_n)_n = ((-1)^n)_n$

Déf 51 : quelques suites remarquables :
- arithmétiques : elles vérifient $u_{n+1} = u_n + r$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$
- géométriques : elles vérifient $u_{n+1} = q u_n$ pour un certain $q \in \mathbb{R}$
- arithmético-géométriques : $u_{n+1} = a u_n + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$
- récurrentes linéaires d'ordre 2 : $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple 52 : Suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

th 53 : On sait exprimer le terme général des suites remarquables.
- arithmétiques : $u_n = u_0 + nr$
- géométriques : $u_n = u_0 q^n$
- arithmético-géométriques : $u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$
- récurrente linéaire d'ordre 2 : si $X^2 - aX - b$ a deux racines r_1, r_2 : $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ pour $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$
  si $X^2 - aX - b$ a une racine double r : $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$ pour $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

Exemple 54 : $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

III) Utilisation des suites sur $\mathbb{R}$

III.1) Développement décimal

th 55 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ telle que :
- $\nexists N, \forall n \geq N, u_n = 9$
- $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{10^n}$ (où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{10^n}$ désigne la limite de la suite convergente $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{10^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$)

Application 56 : $\mathbb{R}$ est indénombrable

Application 57 : $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$

Exercice 58 : Montrer que les rationnels sont exactement les réels dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Déf 59 : Un réel $x \in \mathbb{R}$ est dit normal en base 10 lorsque, dans son développement décimal, la fréquence d'apparition de n'importe quel k-uplet d'éléments de $[\![0,9]\!]$ est de 10^{-k} pour tout entier k.

Prop 60 : Au sens de Lebesgue, presque tous les réels sont normaux en base 10.

III.2) Séries

Déf 61 : si $(u_n)_n$ est une suite réelle, la série de terme général $(u_n)_n$ est la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, souvent notée $\sum_n u_n$

Exemple 62 : La série harmonique est la série $\sum_n \frac{1}{n}$

prop 63 : toute suite réelle $(u_n)_n$ avec $u_0=0$ est la série de terme général la différence de ses valeurs successives $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

th 64 : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, alors

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

III.3) Vitesse de convergence

th 65 : Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2.
Si f s'annule en un point $a \in \mathring{I}$ tel que $f'(a) \neq 0$, alors, pour x_0 suffisamment proche de a, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers a.
De plus, si $f'(a) > 0$, f convexe sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors $(x_n)_n$ converge vers a, et $\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}$

Exemple 66 : avec $y > 0$ et $f(x) = x^2 - y$, on trouve que $0 < x_n - \sqrt{y} \leq 2\sqrt{y}\left(\frac{x_0 - \sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\right)^{2^n}$

DVT 2

Application 20 : Si E est compact, si $f : E \to E$ est continue et si $\forall (x,y) \in E^2$, $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ alors f a un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout $x_0 \in E$, $(f^{on}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

I.3) Suites de Cauchy

Déf 21 : Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E est dite de Cauchy sur E lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N,\ d(u_p, u_q) < \varepsilon$

Exemples 22 :
- $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k 2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $\mathbb{R}$
- $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy sur $\mathbb{R}$.

Déf 23 : E est dit complet si toute suite de Cauchy sur E converge dans E.

Exemples 24 : • $\mathbb{R}$ est complet. • $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Th 25 (Théorème des fermés emboîtés) : Si E est complet et si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E, alors

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0 \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \text{ est un singleton.}$$

Th 26 : Si E est complet et si $f : E \to E$ est contractante, alors f a un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout $x_0 \in E$, $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

Contre-Exemple 27 : $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ n'a pas de point fixe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 : Montrer que $x \mapsto \cos(x) + \frac{1}{4} - x$ s'annule une seule et unique fois sur $\mathbb{R}$.

II) Suites réelles

II.1) Ordre et limite

Déf 29 : On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On étend l'ordre sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $+\infty = \max(\overline{\mathbb{R}})$ et $-\infty = \min(\overline{\mathbb{R}})$.

Déf 30 : Si une suite réelle $(u_n)_n$ vérifie

$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n > A$ (resp : $u_n < A$)

alors on dira que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ (resp : vers $-\infty$) et on posera $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (resp : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Exemples 31 :
- $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
- $(\log(\frac{1}{n}))_n$ diverge vers $-\infty$.

Th 32 : Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites réelles ayant une limite, alors $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$

Contre-exemple 33 : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Th 34 (suite encadrée) : Si $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont des suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors :
- $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty \Rightarrow (v_n)_n$ diverge vers $+\infty$
- $(w_n)_n$ diverge vers $-\infty \Rightarrow (v_n)_n$ diverge vers $-\infty$
- $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (v_n)_n$ converge vers α

Application 35 : Formule de Stirling

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}$$

DVT 1

Déf 36 : • Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite majorée (resp : minorée) lorsque $\exists M,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$ (resp : $u_n \geq M$)

• Une suite à la fois majorée et minorée sera dite bornée.

Th 37 : Une suite croissante majorée ou décroissante minorée converge. En particulier : une suite monotone a une limite.

Exemple 38 : si $u_{n+1} = \max(u_n, \sin(\sqrt{n}))$, $(u_n)_n$ converge.

Exercice 39 :
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$
- Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_n$ converge.

Th 40 : Si I intervalle de $\mathbb{R}$, si $f : I \to I$, si $u_0 \in I$ et si $\forall n$, $u_{n+1} = f(u_n)$ alors
- f croissante $\Rightarrow ((u_1 - u_0) u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante
- f décroissante $\Rightarrow (u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ monotones de sens opposés