150

Polynôme d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Notations : K est un corps, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme.

I Polynômes d'endomorphismes

① L'algèbre $K[u]$

Propriété 1. L'application $\Psi_u : K[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre.

Propriété 2. $\dim K[X] = +\infty$ et $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2 < +\infty$. Ainsi $\ker \Psi_u \neq \{0\}$.

Définition 3. (polynôme minimal). Puisque $K[X]$ est principal on définit le polynôme minimal π_u comme l'unique générateur unitaire de l'idéal $\ker \Psi_u$.

Définition 4 ($K[u]$). L'algèbre $K[u]$ est l'image de Ψ_u.

Propriété 5. $K[u]$ est une algèbre commutative. $K[u] \simeq \frac{K[X]}{(\pi_u)}$.

Application 6. (Calculs de puissances d'un endomorphisme). Soient $A, B \in K[X]$ ($B \neq 0$) tels que $B(u) = 0$. Soit $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B. Alors $A(u) = R(u)$.

Propriété 7. (inversibles). Les inversibles de $K[u]$ sont les $P(u)$ avec $P \wedge \pi_u = 1$.

Corollaire 8. $K[u]$ est un corps ssi π_u est irréductible

Application 9. (Calculs d'inverses). Si $\sum_{k=0}^{d} a_k u^k = 0$ avec $a_0 \neq 0$, alors u est inversible d'inverse $\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k u^{k-1} \in K[u]$.

Exemples 10. Si p est un projecteur tel que $p \neq 0$, $p \neq id$, alors $\pi_p = X^2 - X$.
Si u est nilpotent d'indice d, $\pi_u = X^d$.

② Le polynôme caractéristique.

Définition 11. (éléments propres). Un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ est appelé vecteur propre s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel λ est appelé valeur propre de u.

Définition 12. (polynôme caractéristique). On définit $\chi_u \in K[X]$ par $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda id - u)$.

Propriété 13. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u.

Théorème 14 (Cayley-Hamilton). $\chi_u(u) = 0$, soit encore $\pi_u \mid \chi_u$.

Proposition 15. Les facteurs irréductibles de χ_u sont les mêmes que ceux de π_u.

Définition 16. u est cyclique ssi il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Exemple 17. Si u est cyclique, alors $\chi_u = \pi_u$. [Remarque, la réciproque est vraie.]

Exemple 18. Si u est nilpotent, $\chi_u = X^n$.

③ Le lemme des noyaux et la diagonalisabilité

Proposition 19 (lemme des noyaux). Soit $P_1, \dots, P_m \in K[X]$ deux à deux premiers entre eux. Si $P_1 \dots P_m(u) = 0$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker P_i(u)$. De plus les projections sont des polynômes en u.

Lemme 20. Les noyaux et les images de polynômes en u sont stables par u.

Proposition 21. (diagonalisabilité) Les assertions suivantes sont équivalentes :
- u est diagonalisable (il existe une base de vecteurs propres)
- $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \ker(\lambda id - u)$
- $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim \ker(\lambda id - u)$
- Il existe $P \in K[X]$ non nul et scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$
- π_u est scindé à racines simples.

Application 22. (calcul de puissances). Si $A = P \,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ alors $A^k = P \,\mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$.

Application 23. (diagonalisation de matrices circulantes). Soit $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Soit $C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$ la matrice circulante associée. Posons $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i$.
Il existe une matrice $F \in GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $C = F^{-1} \,\mathrm{Diag}(P(1), \dots, P(\omega^{-n+1}))\, F$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Corollaire 24. Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ représentant les n sommets d'un polygone P du plan complexe. On définit une suite de polygones $(P_k)_k$ par $P_0 = P$ et par récurrence, en notant $Z_k = (z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})^T$ les sommets de P_k, $Z_{k+1} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right)^T$.
Alors $Z_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} (g, \dots, g)^T$ avec $g = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k$ l'isobarycentre de sommets de P.

DEV 1

Remarque 25 (trigonalisabilité). Une matrice est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire 26. Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

① La décomposition de Dunford et les endomorphismes semi-simples.

Notations : Dans cette partie K est un corps parfait :

Définition 27. Un corps K est dit parfait s'il est de caractéristique nulle ou si le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ est surjectif.

Définition-proposition 28. Sur un corps parfait u est semi-simple s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes : (admis)
- Tout sev de E stable par u possède un supplémentaire stable lui aussi.
- u est diagonalisable dans une extension de K.
- π_u est sans facteurs carrés : si P est irréductible alors $P^2 \nmid \pi_u$.

DEV 2

Théorème 29. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe deux uniques endomorphismes s et n tels que
- s est semi-simple
- n est nilpotent
- $u = s + n$
- $s \circ n = n \circ s$

De plus $s, n \in K[u]$ et $\pi_s \mid \pi_u$.

Remarque 30. Si s est semi-simple et π_s est scindé alors s est diagonalisable.

Corollaire 31. Dans le théorème 29, si π_u est scindé on peut remplacer semi-simple par diagonalisable.

Corollaire 32. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. A est diagonalisable ssi $\exp(tA)$ l'est.

II Réduction des endomorphismes.

① Décomposition en sous-espaces cycliques : Jordan nilpotent et Frobenius

Lemme 33 (des noyaux itérés). Supposons u nilpotent d'indice de nilpotence p. Alors $\{0\} = \ker u^0 \subsetneq \ker u^1 \subsetneq \dots \subsetneq \ker u^p = E$.

Théorème 34 (Jordan nilpotent). Si u est nilpotent alors E est somme directe de sous-espaces stables tels que la restriction de u à chacun de ces sous-espaces est un endomorphisme cyclique.

Théorème 35 (Frobenius). Il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de sev de E stables par u telle que
- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
- $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $u_{\mid F_i}$ est cyclique
- $\pi_{u_{\mid F_{i+1}}} \mid \pi_{u_{\mid F_i}}$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$.

La suite de ces polynômes minimaux $P_1 \mid \dots \mid P_r$ ne dépend pas de la décomposition. Ce sont les invariants de similitude de F.

Remarque 36. Les invariants de similitude caractérisent les orbites de l'action par conjugaison de $GL(E)$ sur $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 37. Dans une certaine base, la matrice de u est diagonale par blocs où chaque bloc est une matrice compagnon.

② Décomposition en sous-espaces caractéristiques.

Remarque 38. Lorsque χ_u (ou π_u) est scindé, le lemme des noyaux combiné avec le théorème de Cayley-Hamilton fournit une décomposition de E en sous-espaces caractéristiques. Ceci donne une preuve non algorithmique mais efficace de la décomposition de Dunford.

Théorème 39. (Décomposition de Jordan). Si χ_u est scindé, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\mathrm{Mat}(u) = \mathrm{Diag}(J_{d_1}(\lambda_1), \dots, J_{d_r}(\lambda_r))$ avec

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_d(K), \quad d_1 + \dots + d_r = n, \ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathrm{Sp}(u).$$

De plus cette décomposition est unique à l'ordre des blocs près.

Remarque 40. Il est possible de calculer les dimensions des blocs de Jordan grâce aux dimensions des noyaux de $(u - \lambda \mathrm{id})^k$.

Application 41. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. Soit $\mu = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda, \ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \geq 0$,

$$\|e^{tA}\| \leq P(t)\, e^{t\mu}.$$

Application 42. Soit x_0 un zéro de $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors le point fixe x_0 du système $x'(t) = f(x(t))$ est asymptotiquement stable ssi le linéarisé du système est asymptotiquement stable.

Corollaire 43. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors e^A est semblable à A.

Application 44. On peut classifier en dimension 2 les points d'équilibres de systèmes autonomes grâce à la réduction de Jordan.

③ Réduction en base orthonormée

Notation: Dans cette partie E désigne un espace euclidien (ou avec très peu de modifications un espace hermitien).

Théorème 44 (spectral). Soit u un endomorphisme auto adjoint ($\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle$), alors u est diagonalisable en base orthonormée.

Corollaire 45. Soit u un endomorphisme auto adjoint défini positif. Alors il existe un unique endomorphisme autoadjoint σ tel que $u = \sigma^2$.

Corollaire 46. Si u est inversible, alors u s'écrit de manière unique sous la forme $u = w \circ \sigma$ avec w orthogonal et σ autoadjoint défini positif. C'est la décomposition polaire de u.

Définition 47. u est normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Propriété 48. Si u est normal les orthogonaux des espaces propres de u sont aussi stables par u.

Théorème 49 (réduction des normaux). Si u est normal alors il existe une base de E telle que $\mathrm{Mat}(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots \lambda_r, T_1, \dots T_n)$ avec $\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$ et pour tout j, $T_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corollaire 50 (réduction des isométries vectorielles). Ces endomorphismes isométriques étant normaux ($u^* \circ u = id \Rightarrow u \circ u^* = id$) on en déduit la réduction des isométries:
$\mathrm{Mat}(u) = \mathrm{Diag}(1, \dots 1, R_{\theta_1}, \dots R_{\theta_n})$ dans une base orthonormée.

III Applications à l'analyse matricielle

① Le rayon spectral

Définition 51 (rayon spectral) On appelle rayon spectral de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la quantité $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$.

Proposition 52. Pour toute norme subordonnée, $\|A\| \geq \rho(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 53. $\rho(A) = \inf\{\|A\|,$ pour $\|\cdot\|$ une norme subordonnée$\}$.

Proposition 54. (Gelfand) $\rho(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ où $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée.

② Analyse spectrale des matrices stochastiques

Définition 55. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

Définition 56. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible si pour tout (i,j) il existe $k \geq 0$ tel que $[A^k]_{ij} \neq 0$.

Remarque 57 toute matrice strictement positive est irréductible.

Théorème 58 (Perron-Frobenius). Soit A une matrice positive et irréductible. Alors
- $\rho(A) > 0$
- $\rho(A) \in Sp(A)$ et $\rho(A)$ est racine simple de χ_A,
- Il existe un vecteur propre $x > 0$ associé à $\rho(A)$.
- Si A est strictement positive, alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module $\rho(A)$.

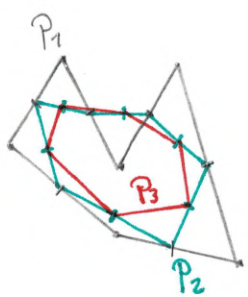
Corollaire 59. Soit $(X_n)_n$ une chaine de Markov homogène et irréductible sur un ensemble d'états fini $E = \{x_1, \dots x_n\}$ et soit P la matrice stochastique associée. Alors
- Il existe une unique probabilité μ sur E invariante par P: $\mu P = \mu$ de plus μ charge tous les éléments de E.
- Si de plus $(X_n)_n$ est apériodique, alors $\lim_{k \to +\infty} P^k = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  Ainsi quelque soit la loi de X_0, en notant μ_k la loi de X_k, $\mu_k \xrightarrow{\text{loi}} \mu$.

③ Convergence de méthodes itératives

Remarque 60. Les propriétés établies en III ② sur le rayon spectral sont les outils de base pour montrer la convergence des méthodes itératives.

Proposition 61. On cherche à résoudre $Ax = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On écrit $A = P - N$ avec P "facile à inverser". On construit par récurrence $(x_k)_k$ par $Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$, soit $x^{(k+1)} = P^{-1}Nx^{(k)} + P^{-1}b$. Alors $x^{(k)} \to A^{-1}b$ si et seulement si $\rho(P^{-1}N) < 1$.

Références :

- Gourdon Algèbre (toutes les choses basiques + Frobenius)
- Grifone Algèbre linéaire (Jordan, décomposition polaire, ...)
- Rombaldi Analyse matricielle (Notamment Perron-Frobenius, rayon spectral)
- Ciarlet Analyse numérique matricielle (Méthodes itératives, rayon spectral)
- Le cours de M. Ramagny (Dunford-Jordan-Chevalley)

Une suite de polygones