Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

1006

I - Le groupe GL(E)

Dans cette partie, on fixe $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1) Généralités

Définition 1 : L'ensemble $(\mathcal{L}(E), +, \circ, 0)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. On note $GL(E)$ l'ensemble des inversibles dans $\mathcal{L}(E)$ pour $\circ$. On note également $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ inversibles.

Proposition 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a les équivalences entre :
1) $u \in GL(E)$, 2) $\ker(u) = \{0\}$, 3) $\mathrm{Im}(u) = E$, 4) $\mathrm{rg}(u) = n$, 5) $\det(u) \neq 0$, 6) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $u(\mathcal{B})$ soit une base de E, 7) u transforme toute base de E en base de E, 8) u admet un inverse à droite (resp. à gauche).

Remarque 3 : En fixant une base $\mathcal{B}$ de E, les groupes $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

Exemple 4 : $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si : $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2) Actions de groupes et stabilisateurs

Proposition 5 : L'application $\begin{array}{ccc} GL(E) \times (E \setminus \{0\}) & \to & E \setminus \{0\} \\ (u, x) & \mapsto & u(x) \end{array}$ définit une action libre et transitive sur $E \setminus \{0\}$.

Remarque 6 : Lorsqu'une action est transitive, il est souvent judicieux de regarder si elle est 2 ou 3-transitive.

Proposition 7 : Soit $r \in [\![1, n]\!]$. On note $L_{r,n}$ l'ensemble des familles libres de E à r éléments. Alors l'action $\begin{array}{ccc} GL(E) \times L_{r,n} & \to & L_{r,n} \\ (u, \mathcal{F}) & \mapsto & u(\mathcal{F}) \end{array}$ est transitive.

Si $\mathcal{F} \in L_{r,n}$, alors son stabilisateur est l'ensemble des isomorphismes u tels que, si $\widetilde{\mathcal{F}}$ est une base de E complétée de $\mathcal{F}$: $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec $A \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $B \in GL_{n-r}(\mathbb{K})$.

Actions et sommes directes :

Propriété 8 : $GL(E)$ agit sur les décompositions de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$: $u \cdot (E_1, \dots, E_r) = (u(E_1), \dots, u(E_r))$. Si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ sont des bases respectives de $E_1, \dots, E_r$, alors le stabilisateur de $(E_1, \dots, E_r)$ est l'ensemble des isomorphismes u tels que : $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \\ 0 & A_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \end{pmatrix}$ où $A_i \in GL_{d_i}(\mathbb{K})$.

Actions et drapeaux :

Définition 9 : On appelle drapeau de E toute famille $(F_0, \dots, F_{n-1})$ de sous-espaces de E tels que : $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = E$.

Proposition 10 : $GL(E)$ agit sur les drapeaux de E via l'action $u \cdot (F_0, \dots, F_{n-1}) = (u(F_0), \dots, u(F_{n-1}))$. Si on a une succession de bases $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \dots \subset \mathcal{B}_{n-1}$ de $F_0, \dots, F_{n-1}$ respectivement, le stabilisateur d'un drapeau $(F_0, \dots, F_{n-1})$ est l'ensemble des $u \in GL(E)$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{n-1}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$ où $A_i \in GL_{\dim(F_i) - \dim(F_{i-1})}(\mathbb{K})$.

Actions par équivalence.

Def 11 : L'application $\begin{array}{ccc} (GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ ((P, Q), M) & \mapsto & PMQ^{-1} \end{array}$ définit une action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée action de Steinitz.

Théorème 12 : Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, si r désigne le rang de M, alors la matrice $J_r := \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dans l'orbite de M. Ainsi, M et N sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$.

Actions par similitude :

Def 12 : L'application $\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$ définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 13 : Les objets suivants sont des invariants de l'action par similitude :
- $\mathrm{tr}(M)$, $\det(M)$, $\mathrm{rg}(M)$,
- π_M (polynôme minimal), χ_M (polynôme caractéristique).

Théorème 14 (Frobenius) : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe d'uniques polynômes $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_1 | \dots | P_r$ et tels que la matrice unitaires $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ soit dans l'orbite de M par similitude où C_P désigne la matrice compagnon du polynôme P. La famille $(P_1, \dots, P_r)$ est appelée famille des invariants de similitude de M.

Ainsi, M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont donc semblables si et seulement si elles ont les mêmes invariants de similitude.

Action par congruence :

Définition 15 : L'application $GL_n(k) \times S_n(k) \to S_n(k)$, $(P, M) \mapsto PMP^t$ définit une action à droite de $GL_n(k)$ sur l'ensemble $S_n(k)$ des matrices symétriques sur k. On l'appelle action par congruence.

Remarque 16 : Il s'agit de la version matricielle de l'action de $GL(E)$ sur l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E :

$$GL(E) \times Q(E) \to Q(E), \quad (u, q) \mapsto q \circ u$$

Proposition 17 : Les quantités suivantes sont invariantes par congruence.
- $\to \operatorname{rg}(M)$
- $\to \operatorname{disc}(M) = \overline{\det(M)}$: la classe de $\det(M)$ dans $\frac{K^\times}{(K^\times)^2}$ si q_M est inversible.

Proposition 18 : Si $M \in S_n(k)$ alors le stabilisateur de M par congruence est le sous-groupe $O(M) = \{P \in GL_n(k) \mid P^t M P = M\}$.

Remarque 19 : Il s'agit du groupe orthogonal pour la forme quadratique

$$q : E \to E, \quad q : k^n \to k^n, \quad x \mapsto {}^t x M x.$$

3) Cas des corps finis

Théorème 20 : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$.

II – Sous-groupes remarquables de $GL(E)$ et leurs générateurs

1) Le groupe $SL(E)$, $SL_n(k)$, générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$

Définition 20 : L'application $\det : GL(E) \to k^\times$ est un morphisme de groupes. Son noyau est noté $SL(E)$. De même, on définit $SL_n(k) = \ker(\det : GL_n(k) \to k^\times)$.

Proposition 21 : $Z(GL(E)) = \{\lambda \mathrm{id}_E \mid \lambda \in k^\times\}$, $Z(SL(E)) = \{\lambda \mathrm{id}_E \mid \lambda \in \mu_n(k)\} = Z(GL(E)) \cap SL(E)$.

Définition 22 : On définit les groupes :
- $PGL(E) = \frac{GL(E)}{Z(GL(E))}$, $PGL_n(k) = \frac{GL_n(k)}{Z(GL_n(k))}$
- $PSL(E) = \frac{SL(E)}{Z(SL(E))}$, $PSL_n(k) = \frac{SL_n(k)}{Z(SL_n(k))}$.

Quels sont des éléments simples de $SL(E)$ qui peuvent être intéressants ?

Définition 23 : Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. L'application $u \in GL(E)$ définie comme :

$$u : x \mapsto x + \varphi(x) a$$

avec $a \in \ker(\varphi)$ est appelée transvection d'hyperplan $\ker(\varphi)$, notée $\tau_{\varphi,a}$.

Théorème 24 :
- $u \in GL(E)$ est une transvection ssi $\det u = 1$ et $\dim(\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)) \leq 1$.
- HCE hyperplan H tel que $u_{|H} = \mathrm{id}_H$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E) \subset H$.
- $\forall (\varphi, a) \in (E^* \setminus \{0\}) \times \ker(\varphi)$, $\tau_{\varphi,a} \in SL(E)$ et $\tau_{\varphi,a}^{-1} = \tau_{\varphi,-a}$.

Définition 25 : Soit $\lambda \in k^\times$. On appelle matrice de transvection toute matrice $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $i, j \in [\![1, n]\!]$ sont fixés.

Théorème 26 : $SL_n(k)$ est engendré par les transvections.

Théorème 27 : $SL(E)$ est engendré par les transvections.

Et pour $GL(E)$?

Définition 28 : Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in E \setminus \ker(\varphi)$. On appelle dilatation d'hyperplan $\ker(\varphi)$ et de rapport $\varphi(a)$ l'application $\delta_{\varphi,a} \in GL(E)$ définie comme :

$$\delta_{\varphi,a} : x \mapsto x + (\varphi(a) - 1) a.$$

On appelle $\lambda := 1 + \varphi(a)$ son rapport.

Prop 29 : La dilatation $\delta_{\varphi,a} \in GL(E)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$.

Dans ce cas, $\delta_{\varphi,a}^{-1}$ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Définition 30 : On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii}$ où $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \neq 0$.

Théorème 31 : $GL_n(k)$ est engendré par les transvections et les dilatations, $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Vers la simplicité de $PSL(E)$:

Théorème 32 : Si $n \geq 3$, les transvections différentes de id sont conjuguées dans $SL(E)$.

Théorème 33 : Si $n \geq 2$ et $k \notin \{\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3\}$, $PSL_n(k)$ est simple. $PSL(E)$ est simple.

2) Le groupe orthogonal euclidien

Dans cette partie, $k = \mathbb{R}$ et E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 34 : On note $O(E) := \{u \in GL(E) \mid \forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle\}$. Alors $O(E) < GL(E)$ appelé groupe orthogonal.

On note également $SO(E) = O(E) \cap SL(E)$.

Définition 35 : On dit que $\tau \in O(E)$ est une réflexion d'hyperplan H CE si $\tau_{|H} = \mathrm{id}_H$ et $\tau_{|H^\perp} = -\mathrm{id}_{H^\perp}$.

On dit que $\tau \in O(E)$ est un renversement s'il existe $V \subset E$ tel que $\dim(V) = n - 2$ et $\tau_{|V} = \mathrm{id}_V$, $\tau_{|V^\perp} = -\mathrm{id}_{V^\perp}$.

Théorème 36 : $O(E)$ est engendré par les réflexions : tout $u \in O(E)$ s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.

Si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements : tout $u \in SO(E)$ s'écrit comme produit d'au plus n renversements.

II - Aspects topologiques et géométriques

Dans toute cette partie $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Proposition 37 : $GL_n(k)$ est une partie ouverte dense de $M_n(k)$.

Si $k = \mathbb{C}$, $GL_n(k)$ est connexe.

Si $k = \mathbb{R}$, on a $GL_n(k) = GL_n^+(k) \cup GL_n^-(k)$

où $GL_n^+(k) = \{M \in GL_n(k) \mid \det(M) > 0\}$, $GL_n^-(k) = \{M \in GL_n(k) \mid \det(M) < 0\}$.

$GL_n^+(k)$ et $GL_n^-(k)$ sont deux parties connexes.

Définition 38 : Si E est un espace euclidien ou hermitien, le choix d'une base orthonormée donne un isomorphisme de groupes entre $O(E)$ (resp. $U(E)$) et $O_n(\mathbb{R}) := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$ (resp. $U_n(\mathbb{C}) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M^* M = I_n\}$)

Proposition 39 : $O_n(\mathbb{R})$ (resp. $U_n(\mathbb{C})$) est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$).

Lien entre groupes compacts et produit scalaire invariants.

Proposition 40 : Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$. Alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ sur $\mathbb{R}^n$ qui soit G-invariant, i.e. $G \subset O(\langle \cdot, \cdot \rangle_G)$

DEV 1

Théorème 41 : Soit E un espace euclidien, $G \subset GL(E)$ un sous-groupe compact et $K \subset E$ une partie convexe, compacte et non-vide de E stable par G : $\forall x \in K, \forall g \in G, g(x) \in K$.

Alors il existe $z \in K$ tel que : $\forall g \in G, g(z) = z$

Application 42 : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ possède un produit scalaire G-invariant. Ainsi, tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Autour de l'exponentielle de matrices et des groupes de Lie

Définition 43 : Pour toute $A \in M_n(k)$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument dans $M_n(k)$ pour toute norme d'algèbre. Cela définit une application $\exp : M_n(k) \to M_n(k)$, $A \mapsto \exp(A) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Proposition 44 :
- $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas injective
- $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Proposition 45 : $\exp \in \mathcal{C}^\infty(M_n(k), GL_n(k))$

Définition 46 : On dit que $G < GL_n(k)$ est un groupe de Lie linéaire si G est une partie fermée de $GL_n(k)$

Définition - proposition 47 : On note $\mathfrak{g} := \{M \in M_n(k) \mid \forall t \in k, \exp(tM) \in G\}$ pour $G < GL_n(k)$ un groupe de Lie linéaire. $\mathfrak{g}$ est alors un k-espace vectoriel appelé « algèbre de Lie » associée à G. Elle est stable par l'opération : $[\cdot, \cdot] : M_n(k)^2 \to M_n(k)$, $(A, B) \mapsto AB - BA$ appelée crochet de Lie.

DEV 2

Théorème 48 (Cartan - von Neumann) : Tout groupe de Lie linéaire G est une sous-variété de $M_n(k)$ et on a :

$$T_{I_n} G = \mathfrak{g}$$

Exemples 49 : $SL_n(k)$ et $O_n(k)$ sont des sous-variétés de $M_n(k)$ et :

$$SL_n(k) = \ker(\det)$$

$$O_n(k) = A_n(k)$$