BESSERVE Pauline

Leçon 221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Références : Demailly, Gourdon, Gonnord-Tosel

Dans toute la leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

I. Définition et existence de solutions, structure

1) Définitions générales

Déf. 1. Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle <u>équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre</u> p une équation $(\mathcal{E})$ de la forme $y^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i y^{(i)} + b$ où les a_i sont continues de I dans $\cancel{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K})$ et b est continue de I dans $\mathbb{K}$. b est appelée <u>second membre</u> de $(\mathcal{E})$.

Rq 2 : Si $n = 1$ on parle d'<u>équation linéaire scalaire</u> ; sinon, de <u>système linéaire</u>.

Ex. 3 : (oscillateur harmonique) $x'' + \omega^2 x = 0$. (OH) $(\omega \in \mathbb{R})$

Déf 4 : On appelle <u>équation homogène</u> associée à $(\mathcal{E})$ et on note (H) l'équation sans second membre $y^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i y^{(i)}$.

Prop. 5 : (<u>passage à l'ordre 1</u>) L'équation fonctionnelle d'ordre (p) $(\mathcal{E})$ peut se ramener à une équation matricielle d'ordre 1 $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ a_0 & \cdots & & & a_{p-1} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Par conséquent on se limitera à l'étude des EDL d'ordre 1.

2) Existence de solutions

Déf. 6 On appelle <u>problème de Cauchy</u> et on ... une équation de la forme $(\mathcal{E})$ munie des p conditions initiales $y^{(i)}(t_0) = x_i$ $\quad 0 \leq i \leq p-1$, $t_0 \in I$.

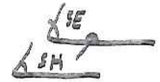
Ex. 7 (chute libre) $\begin{cases} z''(t) = -g \\ z(0) = h \\ z'(0) = v_z \end{cases}$

Déf. 8 Une <u>solution</u> de (P) est un couple (J, φ) où $J \subset I$ et $J \ni t_0$ avec φ vérifiant (P) sur J.
Une <u>solution maximale</u> (J, φ) est une solution telle qu'il n'existe pas $J' \supsetneq J$ telle que (J', φ) soit solution.

Prop. 9 (<u>Cauchy-Lipschitz linéaire</u>) Le problème de Cauchy (P) admet une unique solution maximale et celle-ci est définie sur I.

3) Structure de l'espace de solutions

Th. 10 L'ensemble (S_H) des solutions de (H) est un sev de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$. L'ensemble (S_E) des solutions de (E) est un sea de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction (S_H)



Cor. 11 L'application $\Phi_{t_0} : S_H \to \mathbb{K}^{pn}$, $Y \mapsto Y(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Prop. 12 (principe de superposition) On suppose que $b = \sum_{k=0}^{m} b_k$, alors si φ_k est solution de (E_k) : $y^{(p)} = \sum a_i y^{(i)} + b_k$; $(\sum \varphi_k)$ est solution de (E).

Ex. 13 $x'' + 2x = \cosh t$ se résout via
$$\begin{cases} x'' + 2x = \frac{1}{2} e^{t} & (E_0) \\ x'' + 2x = \frac{1}{2} e^{-t} & (E_1) \end{cases}$$

4) Wronskien

Déf. 14 Soit $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un système de sol. de (H). On pose $W_{\mathcal{F}}(t) = \det(\mathcal{F}(t))$ le wronskien de ce système.

Déf 15 : $\mathcal{F}$ est appelé système fondamental de solutions (SFS) si ses éléments forment une base de (SH).

Ex 16 : $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} ; t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} \right\}$ est un SFS de (OH). $W_{\mathcal{F}}(t) = \begin{vmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{vmatrix} = -1 \ \forall t \in I$.

Prop 17 : $W_{\mathcal{F}}$ vérifie l'EDL $y' = \mathrm{Tr} A \, y$.

Cor. 18 : $W_{\mathcal{F}}(t) = W_{\mathcal{F}}(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s)) ds}$
$\Rightarrow$ $W_{\mathcal{F}}$ est de signe constant.

Th. 19 : $\mathcal{F}$ est un SFS $\Leftrightarrow$ $W_{\mathcal{F}}$ ne s'annule pas $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(t)$ est une base pour un certain $t \in I$.

II. Méthodes de résolution

1) Cas général de résolution de (H) : méthode de la résolvante

On considère (H) $Y' = A(t) Y$ où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est à coeff. continus.

Déf. 19 L'application $I^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(t, t_0) \mapsto \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ est appelée la résolvante de (H), notée R. Si $Y(t_0) = X_0$, R vérifie $R(t, t_0) \cdot X_0 = Y(t)$ $\forall t \in I$.

Prop 20 R vérifie $\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t) R(t, t_0)$ $\forall t \in I$.

$p^{tés}$ 21
- $\forall t \in I$, $R(t,t) = I_n$
- $\forall t_0, t_1, t_2 \in I$, $R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$
- $R(t, t_0)$ est solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ du syst. diff $\frac{dM}{dt} = A(t) M(t)$ où $M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M(t_0) = I_n$.

Prop. 22 Si $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ $\forall t, s \in I$, $R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s) ds \right)$ où l'on a défini l'exponentielle d'une matrice par son DSE : $\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ (Ricici).

2) Équation avec second membre : variation des constantes

Prop. 23 Pour résoudre (E) $Y' = A(t) Y + B(t)$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $Y(t) = R(t, t_0) \cdot X(t)$ avec X supposée différentiable. La solution de $(P) = \begin{cases} (E) \\ Y(t_0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par :
$$Y(t) = R(t, t_0) \cdot X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s) B(s) ds.$$

Ex. 24 $(P) \begin{cases} y'' = g \\ y(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = x_1 \end{cases}$

$\rightarrow y(t) = x_0 + x_1 (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)(t - s) ds$

App. 25 (Théorèmes de Kakutani et Massera)
- Kakutani : Soit E un llcv et K un compact convexe non vide de E. Alors si $T : E \to E$ est une application affine continue qui stabilise K, T admet un point fixe.
- Massera : Soit $T > 0$, $a : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ des fonctions T-périodiques continues. Alors si (E) $y' = ay + b$ admet une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une solution T-périodique sur $\mathbb{R}$.

DVP ②

3) Cas particulier : coefficients constants

Prop 26 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'équation (H) $Y' = AY$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et la solution Y / $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{K}^n$ est $t \mapsto e^{tA} Y_0$.

App 27 (E) $y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \dots + a_p y = 0$. On considère le "polynôme caractéristique" de (E), $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$ que l'on factorise : $P = \prod_{i=1}^{s} (X - r_i)^{m_i}$. Alors les solutions de (E) sont les app. de la forme $t \mapsto \sum_{i=1}^{s} e^{r_i t} P_i(t)$ où $\deg P_i < m_i$ $\forall i$.

3/3

Ex. 28 Pour l'ordre 2 : $P = X^2 + aX + b$

- si P a deux racines distinctes r_1, r_2,
$(S_H) = \{ t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \}$
- si P a une racine double r,
$(S_H) = \{ t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$.

III. Applications

1) Résolution d'équations matricielles

DVP (3)

App. 29 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A \cup \mathrm{Sp}B$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Alors $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $C = AX + XB$.

2) Transformation d'une équation en EDL

App 30 (Bernoulli) Considérons l'équation $y' = ay + by^\alpha$ avec $y > 0$, $\alpha \neq 1$ et a, b continues. En posant $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$, on est ramené à l'EDL $\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) z' = az + b$

3) Théorème de stabilité de Lyapounov

App 31 On considère (E) $x' = f(x)$, où f est une fonction C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'(il) $\exists a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f'(a))$. Alors les solutions de (E) ont même comportement asymptotique au voisinage de a que celles de (L) $x' = f'(a)(x-a)$: a est un point d'équilibre exponentiellement attractif de (E).