KUGLER Benoit (Ref: Gourdon, Rouvière, Sikorav)

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Ex & app

On note X une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$.

I - Extremum global

Def 1 : On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global en $x_0 \in X$ si
$$\forall x \in X \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \geq)$$

Rem 2 : . La valeur d'un maximum est unique, mais pas le point où il est atteint.
. Un extremum est un minimum ou un maximum.

Ex 3 : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ admet un minimum global en $x = 0$.

$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{array} \right.$ admet un maximum global en $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Ex 4 : Si $u \in S(\mathbb{R}^n)$,
$$\max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} = \max Sp(u)$$

Th 5 : Si X est compact et f continue, alors f admet un minimum et un maximum.

Contre ex 6 : Si X non compact : $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \geq 1$
Dessin 1
Si f non continue : $x \mapsto \begin{cases} \tan x, & x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ 0, & x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \end{cases}$

App 7 : Si $u \in S(\mathbb{R}^n)$, u admet une valeur propre réelle.

Exercice 8 : Si $X = \mathbb{R}^{n \geq 2}$, si f est continue, si $\emptyset \neq f^{-1}(\{0\})$ est borné, alors f admet un extremum global.

Def 9 : On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si f est continue et $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

Prop 10 : Une fonction coercive admet un minimum global.

App 11 : Preuve du théorème de d'Alembert-Gauss.

II - Extremum local

1) Conditions du premier ordre

Def 12 : On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in X$ s'il existe V voisinage de x_0 tel que
$$\forall x \in V \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \geq)$$

Prop 13 : Si $X = I$ intervalle de $\mathbb{R}$, si $x_0 \in \mathring{I}$, si f est dérivable en x_0 alors
Dessin 2
$$f(x_0) \text{ extremum local} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Rem 14 : Réciproque fausse : $[x \mapsto x^3]$ en 0

Coro 15 : Si $X = U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, si f est différentiable en $x_0 \in U$, alors

$$f(x_0) \text{ extremum local} \Rightarrow df_{x_0} = 0$$

App 16 : (Théorème de Rolle) Si $X = [a,b]$, si $f(a) = f(b)$, si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 17 : $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + y^2 - y + z^2 - 3z$ admet un minimum global en $(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

2) Conditions du second ordre

Prop 18 : Si f est C^2 sur U, si $a \in U$, si $df_a = 0$, en notant $Q_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$, on a

Dessin 3

- $f(a)$ minimum local $\Rightarrow Q_a$ positive
- Q_a définie positive $\Rightarrow f(a)$ minimum local

Prop 19 : (Principe du maximum). Soit U ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, f C^2 sur U et continue sur $\bar{U}$. Si $\Delta f = 0$ sur U, alors

$$\forall x \in U \quad \min_{\partial U} f \leq f(x) \leq \max_{\partial U} f$$

App 20 : (Unicité du problème de Dirichlet). Le problème $\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } U \\ f = g \text{ sur } \partial U \end{cases}$; f C^2 sur U, continue sur $\bar{U}$ (où U ouvert borné) admet (sous réserve d'existence) une solution unique.

Prop 21 : Les automorphismes* de $\Delta := \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ sont exactement les $h_{\theta,a} : z \mapsto e^{i\theta} \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \Delta$.

(*ie bijection holomorphe d'inverse holomorphe)

DVP 1

III - Fonctions convexes

Def 22. Si X est convexe, on dit que f est convexe si $\forall x,y \in X \ \forall t \in [0,1] \ f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

Prop 23 : Si f est différentiable sur U ouvert convexe, f convexe $\Leftrightarrow \forall x,y \in U \ f(y) - f(x) \geq df_x(y-x)$

Coro 24 : Si f est convexe et admet un minimum local, alors il est global.

Prop 25 : Si f est C^2 sur U ouvert convexe, f convexe $\Leftrightarrow \forall a \in U \ Q_a \geq 0$

App 26 : Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ est convexe et atteint un minimum global en $A^{-1}b =: x_*$

Notation 27 : On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les v.p. de A.

DVP 2

Prop 28 : (Algo. du gradient). Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$

On pose
- $d_k = -\nabla J(x_k)$
- $t_k = \underset{\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, J(x_k + t d_k)$
- $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

Alors $\|x_k - x_*\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^k \|x_0 - x_*\|$

IV - Optimisation sous contrainte

Prop 29 : Si $X = \mathcal{C}$ convexe fermé, si $x \in \mathbb{R}^n$ alors il existe un unique $y \in \mathcal{C}$ tel que

$$\|x - y\| = \min_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\|$$

On note $y =: p(x)$.

Prop 30 : Si $\mathcal{C}$ est un sev, muni d'une b.o.n $(e_1, \dots, e_r)$ alors

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle e_i$$

App 31 : (Formule des moindres carrés)

Soit $y \in \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ x_i 2 à 2 distincts.

Dessin 4

Alors $(a,b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i)^2$ admet un minimum global atteint en un point unique $(\hat{a}, \hat{b})$ tel que

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

où $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$

Th 32 : (Extrema liés). Soit $g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$, ($U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$), de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$S = \{x \in U \mid g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$. Alors, si $f_{|S}$ admet un extremum local en $a \in X$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, on a

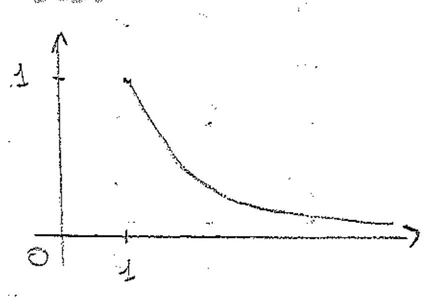
$$df(a) \in \mathrm{Vect}(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$$

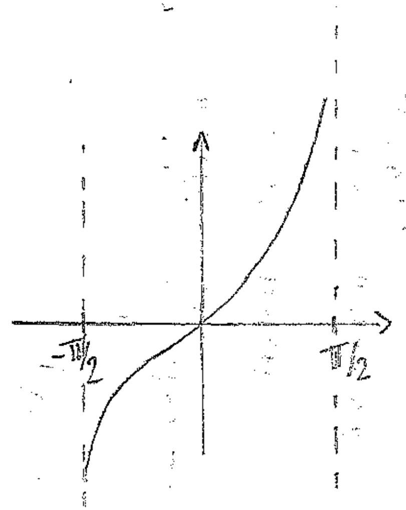
(Les coefficients λ_i tels que $df(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dg_i(a)$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange)

Ex 33 : La fonction $f : \begin{array}{l} S^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^3 \end{array}$ admet un minimum -1 en $(-1,0,0)$ et un maximum 1 en $(1,0,0)$

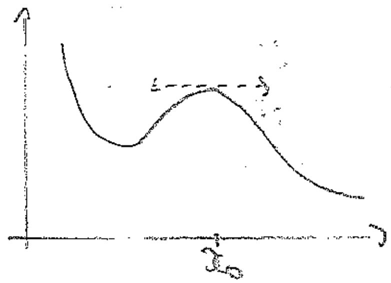
Annexe

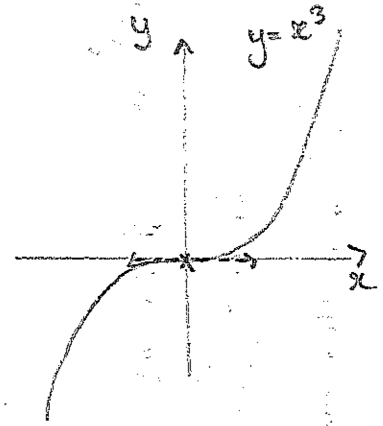
Dessin 1 :





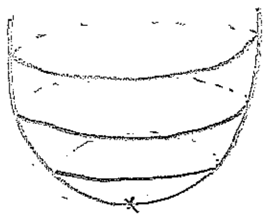
Dessin 2 :





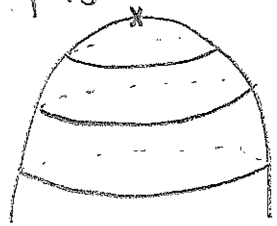
Dessin 3 :

$f(x,y) = x^2+y^2$



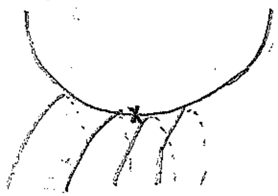
$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = -x^2-y^2$



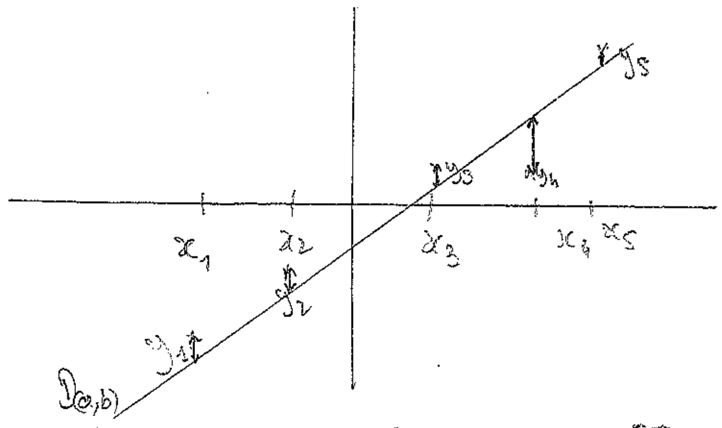
$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = x^2-y^2$



$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Dessin 4 :



Droite des moindres carrés