IZIQUEL Lucas 20/10/2016

218

Applications des formules de Taylor

[Gourdon]

I. Application des formules de Taylor pour des fonctions à variable réelle.

Sauf mention contraire, on considèrera $f : I \to E$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et E un espace de Banach.

Notation 1 Si f est k fois dérivable en $a \in I$, on note $P_{f,k,a}(X)$ le polynôme
$$P_{f,k,a}(X) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} X^i$$

1) Les formules de Taylor

Théorème 2 (Taylor avec reste intégral)

Soit $(a,b) \in I^2$ $a < b$ tels que $f_{|[a,b]}$ est C^{k+1}. Alors
$$f(b) = P_{f,k,a}(b-a) + \int_a^b \frac{(b-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\,dt$$

Théorème 3 (Égalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f : [a,b] \subset I \to \mathbb{R}$ C^k sur $[a,b]$ et $(k+1)$ dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que
$$f(b) = P_{f,k,a}(b-a) + \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)$$

Remarque 3' Ce théorème est vrai seulement pour f à valeurs réelles. On utilise le théorème de Rolle dans la démonstration.

Contre exemple 3'' $f : t \mapsto e^{it}$ ne vérifie pas le théorème 3.

Théorème 4 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f : [a,b] \subset I \to E$ C^k tel $k+1$ fois dérivable sur $]a,b[$.

Alors $\|f(b) - P_{f,k,a}(b-a)\| \leqslant \|f^{(k+1)}\|_{]a,b[,\infty} \dfrac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}$

Théorème 5 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to E$ C^k tel $a \in I$ tel que $f^{(k+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \to 0$ et $a+h \in I$, on a
$$f(a+h) = P_{f,k+1,a}(h) + o(\|h\|^{k+1})$$

2) Application à l'étude locale des fonctions : développements limités et limites

Définition 6 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in I$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre m en a si : au voisinage de a, on a une suite $(a_0, \dots, a_m) \in E^m$ telle que
$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_m h^m + o(\|h\|^m)$$

Exemple 7 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^m + o(x^m)$ $\forall m > 0$.

Proposition 8 Si f admet un développement limité à l'ordre m en a (noté $DL_m(a)$), alors il est unique.

Proposition 9 Si $f : I \to E$ est m fois dérivable en a, alors f admet un $DL_m(a)$ donné par la formule de Taylor-Young.

Exemple 10 (Cas des polynômes).

Soit $P(x) = \sum_{m=0}^{N} a_m x^m \in \mathbb{R}_N[X]$. $x \mapsto P(x)$ est C^∞, donc admet un $DL_k(0)$ $\forall k$. En particulier $\forall m \leqslant N$ $a_m = \frac{P^{(m)}(0)}{m!}$

Application 11 Quelques développements limités classiques (tableau 1).

Exemple 12 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$

Remarque 13 On a l'équivalence f dérivable en $a \iff f$ admet un $DL_1(a)$, et $f'(a)$ est donné par le $DL_1(a)$.

Cependant, on n'a pas f admet un $DL_2(0) \Rightarrow f$ deux fois dérivable en a.

Exemple 14 $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ f n'est pas D^2 en 0, mais $f(x) = o(x^2)$.

Application 15 • Calcul de limites forme indéterminées

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$$

• $\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$

3) Etudes globale de fonctions

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On s'intéresse au caractère développable en série entière de f (DESE).

Proposition 15

f est DESE au voisinage de $0 \in I$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$ tel que la suite de fonctions (R_n) définies par

$$R_n(x) = f(x) - P_{f,n,0}(x)$$

tend simplement vers 0 sur $]-\alpha, \alpha[$. La série entière de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a alors un rayon de convergence supérieur à α et f est égale à la somme de cette série sur $]-\alpha, \alpha[$.

Remarque 17 Par Taylor avec reste intégral, on a une expression utile de R_n

Remarque 18 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) e^{-1/x}$ est C^∞ mais pas DESE au voisinage de 0

Exemple 19 $f : x \mapsto e^x$
$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(0) = 1$ et $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 20 (théorème de Bernstein)

Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ C^∞. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in]-a, a[$, $f^{(k)}(x) \geq 0$.
Alors f est DESE sur $]-a, a[$

Proposition 21 (inégalité de Kolmogorov)

• $f : I \to \mathbb{C}$ C^2 tel que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On pose $\Pi_0 := \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$ et $\Pi_2 := \sup_{\mathbb{R}} |f''(x)|$. Alors

$$\Pi_1 = \sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq \sqrt{2 \Pi_0 \Pi_2}$$

[FGN]

4) Application aux probabilités

Définition 22 Soit X variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$.
On définit la fonction caractéristique (ou transformée de Fourier) de X comme la fonction

$$\varphi_X : t \mapsto \mathbb{E}[e^{iXt}]$$

Proposition 23 Soit X variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$. On suppose que $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$. Alors φ_X est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall k \in [\![0, n]\!]$

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$$

Remarque 24 En particulier, on a $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$ lorsque $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$. On a accès au calcul du k-ième moment de X.

[Bole-Ledoux]

DÉVELOPPEMENT ①

Théorème 25 (Théorème central limite)

Soit (X_n) suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées et L^2.
En notant $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) > 0$, on a

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{loi}} N \quad \text{de loi } \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque 26

Le résultat se généralise à $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Pour définir φ_X, on prend $t \mapsto \mathbb{E}[e^{i\langle t, x\rangle}]$ avec un produit scalaire, et sans normaliser par σ dans le théorème, on a convergence vers le vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ où Σ matrice de covariance.

5) Application en analyse numérique [R]

On cherche à évaluer numériquement la racine a d'une fonction solution de l'équation $f(x) = 0$, en supposant donné x_0 proche de a. On l'approche par la suite $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

Exercice 28 Supposons $f :]a-r, a+r[\to \mathbb{R}$ est C^2, et que $f'' \neq 0$ sur cet intervalle I.
Soit $M = \max_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$ et $h = \min(r, \frac{1}{M})$. $\tilde{I} :=]a-h, a+h[$. Alors
• $\forall x \in \tilde{I}$, $|x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a| \leq M|x-a|^2$
• $\forall x_0 \in \tilde{I}$, $|x_m - a| \leq \frac{1}{M}(M|x_0 - a|)^{2^m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

5) Application en géométrie [Deleaumarche] [Rou]

Les formules de Taylor permettent de connaître la position du graphe d'une fonction par rapport à sa tangente.

Dans cette partie, on étudie le cas d'un arc $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$

Proposition 29 (Position d'un arc par rapport à sa tangente)
Soit γ arc paramétré et $t_0 \in \mathring{I}$. Sous réserve d'existence des deux entiers suivants :
• $p := \min\{m \geq 1 \mid \varphi^{(m)}(t_0) \neq 0\}$
• $q := \min\{m > p \mid \varphi^{(m)}(t_0)$ non colinéaire à $\varphi^{(p)}(t_0)\}$

Alors on peut déterminer la position locale du support de l'arc par rapport aux vecteurs $\frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!} =: \vec{v}$ et $\vec{w} := \frac{\varphi^{(q)}(t_0)}{q!}$ selon la parité de p et q.
(Figure 3)

Exemple 30 $M : t \mapsto \begin{cases} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{cases}$ $\forall t \in 2\pi\mathbb{Z}$ $M(t)$ point de rebroussement vertical

II. Cas d'une fonction à variables dans U ouvert de $\mathbb{R}^d$

1) Formulaire [Rou]

Théorème 31 (Taylor avec reste intégral)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ où U ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose f C^{k+1}. Alors si $a \in U$, dans un voisinage de a tel que $[a, a+h] \subset U$:
$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

Les termes $D^k f(a)(h)^k$ ont pour expression précise
$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)(h_{i_1}, \dots, h_{i_k}).$$

Théorème 32 (Taylor-Young)
Si f est k fois différentiable en $a \in U$, on a près de a
$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \dots + \frac{D^k f(a)(h)^k}{k!} + o(\|h\|^k)$$

2) Application : position d'une surface par rapport à son plan tangent

Exercice 33 (Lemme de Morse)
$0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et f C^3. On suppose que 0 est un point de singularité non dégénéré de f ($Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ non dégénérée, de signature $(p, n-p)$).
Alors $\exists g$ C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g(0) = 0$ et
$$f(x) - f(0) = g_1(x)^2 + \dots + g_p(x)^2 - g_{p+1}(x)^2 - \dots - g_n(x)^2$$

DEVELOPPEMENT

Application 34. Cas $n = 2$ selon la signature de $D^2 f(0)$
• $(2, 0)$ la surface est strictement au dessus du plan tangent
• $(0, 2)$ " " dessous "
• $(1, 1)$ "point selle", la surface traverse son plan tangent selon une courbe admettant un point double en $(a, f(a))$

3) Problèmes d'extrémums [Rou]

Proposition 35 • $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en a, alors si $Df(a)$ existe, $Df(a) = 0$ (condition nécessaire)
• $f : U \to \mathbb{R}$ admet un maximum (resp minimum) local en $a \in U$ et $D^2 f(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a)$ forme quadratique négative (resp. positive) (condition nécessaire).
• suffisante : $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a) > 0 \Rightarrow a$ minimum local strict.

Exercice 36 : Extrema de $(x, y) \mapsto x^2 + y^4$ 0 min global strict.

Figure 2 Newton

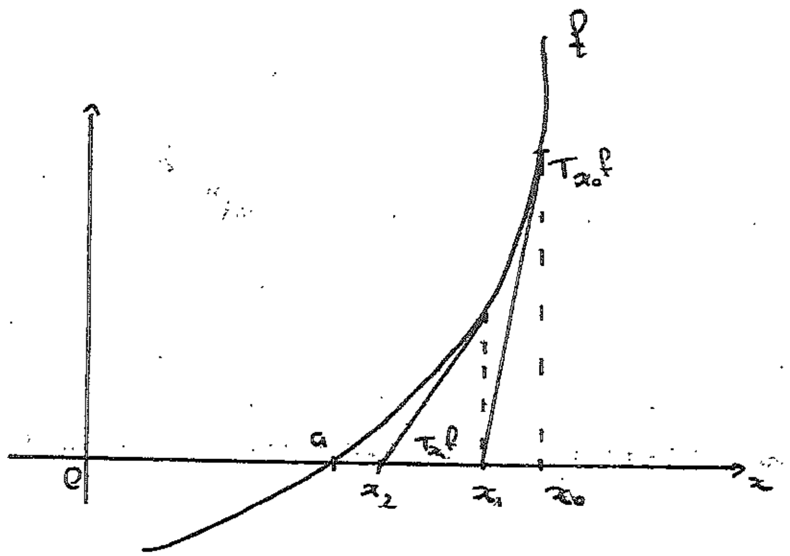

Figure 3

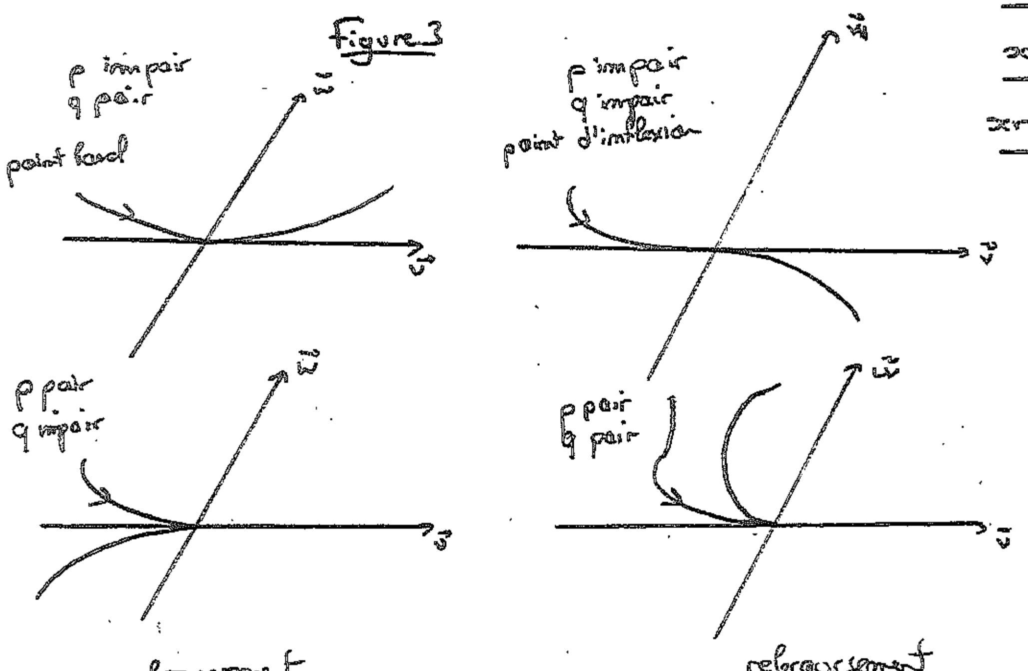

Figure 1 développements limités classiques (en 0)

fonction	DL (0)
$x \mapsto e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$x \mapsto \sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
$x \mapsto \cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$x \mapsto \mathrm{sh}\, x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
$x \mapsto \mathrm{ch}\, x$	$1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$\alpha \in \mathbb{R}$ $x \mapsto (1+x)^\alpha$	$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$x \mapsto \log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$x \mapsto \arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$x \mapsto \arcsin x$	$x + \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2.4.\dots(2n)(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$