Pimoy Alain

215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

références : Gardon, Madère, Cavini FGN, PGCD.

Dans toute cette leçon, $U \subset \mathbb{R}^n$ sera ouvert, F désignera un espace vectoriel normé de dimension finie.

I Applications différentiables

définition 1 : une application $f : U \to F$ est dite différentiable en $a \in U$ si il existe $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ telle que :
$\forall h \in \mathbb{R}^n$, $a+h \in U$, $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + u(h) + o(\|h\|)$

On appelle u la différentielle de f en a, et on la note $df(a)$.

remarque 2 : si f est différentiable en a, alors $df(a)$ est unique. De plus, comme $\mathbb{R}^n$ et F sont de dimension finie, $df(a)$ ne dépend pas de la norme.

définition 3 : On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en a pour tout $a \in U$.
L'application $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ est appelée différentielle de f.
$a \mapsto df(a)$

exemple 4 : • Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$, alors df est constante, et $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $df(a) = f$
• Si $U = GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, l'application $f : M \mapsto M^{-1}$ est différentiable et $\forall M \in U$, $df(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$

remarques 5 : si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, et si $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en $a \in \mathring{I} \iff f$ est dérivable en a.
De plus, dans ce cas, $df(a) : h \mapsto f'(a) \times h$.

proposition 6 : si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

proposition 7 : • si f est différentiable en a et admet un extremum local en a, alors $df(a) = 0$

proposition 8 : • Si $f, g : U \to F$ sont différentiables en $a \in U$, alors pour tout λ, μ réels, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a, et $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$
• Si $f : U \to F$ est différentiable en a, si $g : V \to F'$ est différentiable en $f(a)$ ($f(U) \subset V$), alors $g \circ f$ est différentiable en a, et
$$d(g\circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

corollaire 9 : si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont différentiables en a, alors $f \times g : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et
$$d(f\times g)(a) = g(a)\,df(a) + f(a)\,dg(a)$$

application 10 : $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est différentiable et $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$,
$M \mapsto M^2$
$df(M) : H \mapsto HM + MH$

définition 11 théorème : si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors :
$\exists! v \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df(a).h = \langle v, h\rangle$; où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique.
on note alors $v = \nabla f(a)$, que l'on appelle gradient de f en a.

exemple 12 : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable, et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = 2x$.
$x \mapsto \|x\|_2^2$

théorème 13 (inégalité des accroissements finis) : si $[a,b] \subset U$, et si $f : U \to F$ est différentiable en x, $\forall x \in]a,b[$, alors :
si $\forall x \in]a,b[$, $\|df(x)\| \leq M$, $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$.

application 14 : si U est connexe, et si $\forall x \in U$, $df(x) = 0$, alors f est constante.

II Difféomorphismes

définition 15 : On dit que $f : U \to F$ est $\mathcal{C}^1$ si $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ est continue.

exemple 16 : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$.
$x \mapsto \|x\|_2^2 - 1$

contre-exemple 17 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$
mais df n'est pas continue en $(0,0)$.

définition 18 : On dit que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image si
- $f : U \to f(U)$ est une bijection
- $f^{-1} : f(U) \to U$ est $\mathcal{C}^1$.

DVP 1

<u>exemple 19</u> : si $f \in GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme

<u>proposition 20</u> : si $f : U \to F$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U vers $f(U)$, alors :
pour tout $a \in U$, $df(a)$ est inversible de réciproque $df^{-1}(f(a))$

<u>contre-exemple 21</u> : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est $\mathcal{C}^1$, bijective, mais n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

<u>exemple 22</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x - e^y, x+y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ sont des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes

<u>théorème 23 (inversion locale)</u> : soit $f : U \to F$ $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$.
Si $df(a)$ est inversible, alors : il existe V voisinage ouvert de a, W voisinage ouvert de $f(a)$, tels que : $f_{|V} : V \to W$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme

<u>corollaire 24 (inversion globale)</u> : si $f : U \to F$ est $\mathcal{C}^1$ et injective, alors :
$\forall x \in U$, $df(x)$ est inversible $\Leftrightarrow$ $f(U)$ est ouvert et $f^{-1} : f(U) \to U$ est $\mathcal{C}^1$.

<u>application 25</u> : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$, et si $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x-y\|$,
alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

<u>contre-exemple 26</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ est $\mathcal{C}^1$, de différentielle inversible en tout point, mais n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

<u>définition 27</u> : une application $f : U \to F$ est dite $\mathcal{C}^2$ si elle est $\mathcal{C}^1$ et si df est $\mathcal{C}^1$.
On note alors $d^2 f = d(df)$.
De même, on définit par récurrence f $\mathcal{C}^{n+1}$ si f est $\mathcal{C}^n$ et $d^n f$ est $\mathcal{C}^1$.
On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^n$.

<u>remarque 28</u> : en identifiant canoniquement $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F))$ avec $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, F)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $\mathbb{R}^n$ dans F, on a que :
si f est $\mathcal{C}^2$, alors $d^2 f$ est une application bilinéaire.
De même, si f est $\mathcal{C}^n$, $d^n f$ est une application n-linéaire.

<u>exemple 29</u> : si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$, alors $\forall m \geq 2$, $d^m f = 0$.

<u>théorème 30 (Schwarz)</u> : soit $f : U \to F$ une application $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$.
alors si df est différentiable en a, $d^2 f(a)$ est une application bilinéaire symétrique :
$\forall h, k \in \mathbb{R}^n$, $d^2 f(a)(h,k) = d^2 f(a)(k,h)$

<u>exemple 31</u> : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (e^x - e^y)$, alors f est $\mathcal{C}^2$ et :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $d^2 f(x,y)\left(\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\right) = e^x h_1 k_1 - e^y h_2 k_2$.

<u>remarque 32</u> : On peut donc identifier $d^2 f(x)$ avec la forme quadratique associée
$q_f(x) : h \mapsto d^2 f(x)(h,h)$.
On dira que $d^2 f(x)$ est dégénérée (resp. non-dégénérée, définie positive, etc.) si $q_f(x)$ l'est.

<u>III Dérivées partielles</u>

Dans toute cette partie, $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{B}' = (f_j)_{1 \leq j \leq m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

<u>définition 33</u> : soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on définit, pour $\varepsilon > 0$ assez petit
$\varphi_v :]-\varepsilon, \varepsilon[\to F$, $t \mapsto f(a + tv)$.
Si φ_v est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur v, et on note $f'_v(a) = \varphi'_v(0)$
Si $v = e_i$, on note $f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, que l'on appelle dérivée partielle d'indice i de f en a.

<u>exemple 34</u> : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^2$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i$

<u>proposition 35</u> : si $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$, alors f admet des dérivées en a selon tout vecteur v, et $f'_v(a) = df(a) \cdot v$

+ théorème des fonctions implicites

<u>remarque 36</u> : La réciproque est fausse : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
<u>contre-exemple</u>
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
alors f admet des dérivées selon tout vecteur en O mais n'est pas différentiable en O car non continue en O.

<u>proposition 37</u> : si f est différentiable en a, avec $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$, alors :
$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) . dx_i \quad \text{où } (dx_i) \text{ des probabase duale de } B$$

<u>proposition 38</u> : si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a); \dots ; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

<u>exemple 39</u> : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$. Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $df(x,y) = \frac{-2x\,dx - 2y\,dy}{(x^2+y^2)^2}$

<u>théorème 40</u> : Si $f : U \to F$ admet des dérivées partielles au voisinage de a, continues en a, alors f est différentiable en a.

<u>exemple 41</u> : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ est différentiable.
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$

<u>définition 42 (jacobienne)</u> : soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in U$, que l'on écrit $f = (f_1, \dots, f_m)$. Alors $\forall i \in [\![1,m]\!]$, f_i est différentiable en a, et on appelle matrice jacobienne de f en a la matrice
$$Jac(f)(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{\substack{i \in [\![1,m]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}}$$
. C'est la matrice de $df(a)$ dans les bases B et B'.

<u>application 43</u> : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une submersion ($df(a) \neq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}^n$) alors $\forall b \in \mathbb{R}$, $\Pi_b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = b\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et son espace tangent en $x_0 \in M_b$ est
$$T_{x_0}\Pi_b = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum \frac{\partial f(a_0)}{\partial x_i} . x_i = 0\} = \ker(Jac(f)(a_0))$$

<u>Définition 44</u> : on définit par récurrence les dérivées partielles d'ordre supérieur de f en a, si f est C^p, par :
$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \cdots \partial x_{i_n}^{k_n}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_j}}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \cdots \partial x_{i_j}^{k_j - 1} \cdots \partial x_{i_n}^{k_n}}\right)(a), \text{ avec } k_1 + \dots + k_n = p.$$

<u>théorème 45 (formule de Taylor)</u> en notant $\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[p]} = \sum_{i_1 + \dots + i_q = p} \frac{p!}{i_1! \cdots i_q!} h_1^{i_1} \cdots h_q^{i_q} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_q^{i_q}}(a)$, on a : si f est C^p sur U, à valeurs dans $\mathbb{R}$:
$\forall x \in U$, $\forall h \in \mathbb{R}^n \mid [x, x+h] \subset U$, $\exists \theta \in]0,1[$, avec
$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!}\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[k]} + \frac{1}{p!}\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h)\right]^{[p]}$$

<u>Corollaire 46 (formule de Taylor Young)</u> : avec les hypothèses et les notations du théorème 45 :
$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[k]} + o(\|h\|^p).$$
$\boxed{\text{+ reste intégral (à valeurs dans F)}}$

<u>application 47</u> : si f est C^2 et si $df(a) = 0$, $d^2f(a)$ est définie positive (resp définie négative), alors f possède un minimum local (resp. maximum local) en a.

<u>théorème 48 (lemme de Morse)</u> : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application C^3. Soit $a \in U$ telque $df(a) = 0$. Alors si $d^2 f(a)$ est non dégénérée de signature (r,s), alors :
- il existe $\varphi : V_a \to V_0$ un C^2 difféomorphisme d'un voisinage de a à un voisinage de 0, telque
$$\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in V_0, \quad f \circ \varphi^{-1}(y) = f(a) + \sum_{i=1}^{r} y_i^2 - \sum_{j=r+1}^{n} y_j^2.$$

développement 2