Réf : Topologie, calcul différentiel et variable complexe, Jean St Raymond.
Topologie, Analyse 3e année, Skandalis. Analyse Gourdon

208 — Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

I. Espaces vectoriels normés

Définition 1 : Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall x\in E$, $\|x\|=0 \iff x=0$
- $\forall \lambda\in \mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\forall x\in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$
- $\forall x\in E, \forall y\in E$, $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

exemples :
- $E=\mathbb{R}^n$, $\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$
- $E=\mathcal{C}^k(K,\mathbb{R})$, $\|f\|_p = \sum_{j=0}^{p} \|f^{(j)}\|_\infty$ où $p\leq k$ et K compact.
- $E=\ell_\infty(\mathbb{R})$, $\|(u_n)_{n\geq 0}\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |u_n|$

Définition 2 :
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On munit E de la topologie liée à la distance $d(x,y) := \|y-x\|$.

Proposition 3 : Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $X\subset E$. Alors :
- X est ouvert si et seulement si $\forall x\in X, \exists r>0, B(x,r) := \{y \,|\, \|y-x\|<r\} \subset X$
- X est fermé si et seulement si toute suite convergente de X a sa limite dans X.

Proposition 4 : Soient $(E,\|\cdot\|)$ et $(F,\|\cdot\|)$ deux espaces normés et $f : E\to F$ linéaire.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) f est continue
2) f est continue en $\vec{0}_E$
3) f est bornée sur la boule unité
4) f est lipschitzienne.

Définition 5 : Soit $\mathcal{L}_c(E,F) = \{f\in\mathcal{L}(E,F) \text{ continues}\}$.
L'application définie par $|||f||| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|f(x)\|$ donne à $\mathcal{L}_c(E,F)$ une structure d'espace normé.

remarque : on a alors : $\forall x\in E$, $\|f(x)\| \leq |||f|||\cdot\|x\|$.

Notation : On note $E' = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$ le dual topologique de E formé des formes linéaires continues.

exemples : Pour $E=\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, $f\in E \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt\in\mathbb{C}$ est continue.
Pour $E=\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{C})$, $f\in E\mapsto f'\in(\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ est continue pour la norme sur E, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 6 : Soient E un ev, et N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $\alpha,\beta>0$ tels que :
$\forall x\in E$, $\alpha.N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta.N_1(x)$.

Proposition 7 : N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.

II. Cas de la dimension finie

1. Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition 8 : On munit $\mathbb{R}$ de la topologie de l'ordre, dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles ouverts.
$\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie produit associée.

Proposition 9 : $\mathbb{R}$ est complet

Th (Bolzano-Weierstrass) 10 : Toute suite réelle bornée ~~converg~~ admet une suite extraite convergente.

Corollaire 11 : Toute suite de $\mathbb{R}^n$ bornée admet une sous suite convergente.

Corollaire 12 : Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

2. Espaces normés de dimension finie

Proposition 13 : Soient E un espace normé de dimension finie, et N et N' deux normes sur E. Alors N et N' sont équivalentes.

Corollaire 14 : Tout espace normé de dimension $n\geq 1$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 15 : La boule fermée et la sphère unité d'un espace normé de dimension finie sont compactes. Un tel espace est localement compact.

Corollaire 16 : Un evn de dimension finie est complet.

Corollaire 17 : Un ~~sous~~ espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé de dimension quelconque est fermé.

Prop 18 : Une application linéaire entre deux espaces normés est continue dès que sa source est de dimension finie.

Proposition 19 : Si $(E,\|\cdot\|)$ est un espace normé de dimension finie, alors $E' = E^*$ est homéomorphe à E (par un isomorphisme bicontinu).
remarque : L'isomorphisme en question n'est pas unique, et il n'y en a pas de "canonique".

Théorème 20 (Riesz) : Les espaces vectoriels normés localement compacts sont ceux de dimension finie.

III. Espaces de Banach

1. Propriétés

Définition 20 : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

remarque : en particulier, tout espace normé de dimension finie est de Banach.

Proposition 21 : Soient E et F deux espaces normés. Si F est de Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ aussi.
En particulier, si E est un espace normé, E' est un espace de Banach.

Définition 22 : Une algèbre de Banach est une K-algèbre E munie d'une norme d'espace vectoriel telle que $\forall x,y \in E$, $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour laquelle E est complet.

Proposition 23 : Si E est un espace de Banach, $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ, |||\cdot|||)$ est une algèbre de Banach.

Proposition 24 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On dit que la série de terme général (x_n) :
- converge si la suite $\left(\sum_{p=0}^{n} x_p\right)$ converge dans E
- converge normalement si $\sum_{p=0}^{\infty} \|x_p\| < \infty$

Alors : E est de Banach $\Leftrightarrow$ toute série normalement convergente converge.

Corollaire 25 : Soit $E, \|\cdot\|$ une algèbre de Banach, et soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Alors si $\|x\| < R$, $x \in E$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge dans E.

remarque : ceci s'applique en particulier à $\mathcal{L}(E)$ où E est un espace de Banach.

Application 26 : Soit E un espace de Banach. $\mathcal{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

Application 27 : Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(f) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n}{n!}$ converge.

Théorème 28 (Baire) : Soit E un espace de Banach. Une intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense.

Corollaire 29 : Si $E = \bigcup_{n \geq 0} F_n$ où F_n est fermé, au moins un F_n est d'intérieur non vide.

DVT1. Application 30 (Th de l'application ouverte) : Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $f : E \to F$ linéaire surjective continue. Alors f préserve les ouverts.

Corollaire 31 : Si E et F sont deux espaces de Banach, et si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ est bijective. Alors f^{-1} est continue.

Théorème 32 (Banach-Steinhaus) : Soient E et F deux espaces normés, tels que E est de Banach. Soit $A \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. On suppose $(f(x))_{f \in A}$ bornée pour tout x. Alors A est bornée dans $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$.

Corollaire 33 : Si E est un espace de Banach, une limite simple d'applications linéaires continues sur E est linéaire continue.

2. Exemples et contre exemples

Proposition 34 : $\mathbb{R}[X]$ n'est un espace de Banach pour aucune norme.

Proposition 35 : Si $p \geq 1$, $\ell_p(\mathbb{R}) = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |x_n|^p < \infty\}$ muni de $\|x\|_p = \left(\sum |x_n|^p\right)^{1/p}$ est complet.
$\ell_\infty(\mathbb{R}) = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_n = O(1)\}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ aussi.

DVT 2.

Théorème 36 : Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (si $p = 1$, $q = \infty$ et réciproquement).
Alors si $(x_n) \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$ et $(y_n) \in \ell_q(\mathbb{R}^n)$, alors $(x_n y_n) \in \ell_1(\mathbb{R}^n)$ et $\|x_n y_n\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Corollaire 37 : Pour $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n)$, on note $\varphi_x : y \in \ell_q(\mathbb{R}^n) \to \sum_{n \geq 0} x_n y_n \in \mathbb{R}$.
Alors $\varphi_x \in (\ell_q(\mathbb{R}^n))'$ et $x \in \ell_p(\mathbb{R}^n) \mapsto \varphi_x \in \ell_q(\mathbb{R}^n)'$ est une injection isométrique de $(\ell_p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$ dans $(\ell_q(\mathbb{R}^n)', |||\cdot|||)$.

Théorème 38 : Cette application est une bijection si $p \neq 1$.

Corollaire 31 $\Rightarrow$ Si $p \neq 1$, il existe un isomorphisme bicontinu $\ell_p(\mathbb{R}) \simeq \ell_q(\mathbb{R})'$

Proposition 39 : $(\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Proposition 40 : Si $k \geq 1$, $(\mathcal{C}^k([0;1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

Proposition 41 (Weierstrass) : $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, $P \longmapsto (t \mapsto P(t))$ est une injection d'image dense pour les normes $\|\cdot\|_\infty$.

Corollaire 42 : Si $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, et si $\forall n \geq 0$, $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$, alors $f = 0$.

Donc $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R}) \mapsto \left(\int_0^1 f(t) t^n dt\right) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est linéaire continue injective.

III Espaces de Hilbert

<u>Proposition 43 :</u> Si $(E, \langle ; \rangle)$ est un espace préhilbertien, $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x ; x \rangle}$ définit une norme sur E. On dit que E est un espace de Hilbert si il est complet pour $\| \cdot \|_2$

<u>exemples :</u> · tout espace euclidien
· $l_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ pour $\langle x ; y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$.

<u>Théorème 44 :</u> Soit $(E, \langle ; \rangle)$ un espace de Hilbert.
Alors $\Theta : x \in E \mapsto \langle x ; \cdot \rangle \in E'$ est un isomorphisme isométrique.

<u>Théorème 45 :</u> Soient E un espace de Hilbert, $x \in E$, A une partie convexe fermée non vide de E. Alors $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ est atteint en un unique point $p(x)$, caractérisé par $\forall z \in A, \langle x - p(x) ; z - p(x) \rangle \leq 0$.

<u>exemple :</u> si A est un sev fermé de E, on retrouve la projection sur A parallèlement à $A^\perp$.

<u>Définition 46 :</u> Une famille orthogonale d'un Hilbert E est dite totale si elle engendre un sous espace dense.

<u>Exemples :</u> · les suites $\delta_n : k \in \mathbb{N} \mapsto \delta_{nk} \in \mathbb{R}$ donnent une famille orthogonale totale de $l^2(\mathbb{N})$
· une base orthonormée d'un espace euclidien est évidemment totale
· $(x \mapsto \cos(2\pi n x))_{n \geq 0}, (x \mapsto \sin(2\pi n x))_{n \geq 1}$ forment une famille totale de $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

<u>Application 47 :</u> Si $(e_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale totale, on a
$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x ; e_n \rangle|^2$ et $x = \sum_{n \geq 0} \langle x ; e_n \rangle e_n$.

<u>remarque :</u> on retrouve ainsi les formules sur les séries de Fourier.

IV Lien avec la convexité

<u>Proposition 48 :</u> Soit A une partie convexe d'un espace normé E.
Alors $\mathring{A}$ et $\bar{A}$ sont convexes.

<u>Définition 49 :</u> Soit $X \subset E$ une partie d'un espace vectoriel.
On note $\mathrm{Conv}(X) = \bigcap_{C \supset X \text{ convexe}} C$. C'est le plus petit convexe contenant X et on l'appelle enveloppe convexe de X.

<u>Proposition 50 :</u> Soit K un compact d'un espace normé E. Alors :
· si $\dim(E) < \infty$, $\mathrm{conv}(K)$ est compacte.
· si $\dim(E) = \infty$, $\mathrm{conv}(K)$ est relativement compacte.

<u>remarque :</u> le premier point constitue le théorème de Carathéodory.

<u>Théorème 51 (Hahn Banach) :</u>
· <u>version ~~géométrique~~ analytique :</u> Soient V un espace vectoriel réel et $p : V \to \mathbb{R}$ convexe. On suppose f définie sur G une forme linéaire $\leq p$.
Alors il existe $\tilde{f} \in V^*$ telle que $\tilde{f}_{|G} = f$ et $\tilde{f} \leq p$.
· <u>version géométrique :</u> Soient E un espace vectoriel normé, C un convexe <u>ouvert</u>, et B un ~~sous espace affine~~ convexe disjoint de C. Alors il existe un hyperplan fermé séparant A et B.

<u>Application 52 :</u> L'injection isométrique du corollaire 37 n'est pas surjective si $p = 1$. En effet, il existe $\varphi \in (l^\infty)'$ telle que $\varphi((x_n)) = \lim x_n$ dès que (x_n) converge, et φ ne peut s'écrire φ_y par $y \in l^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

<u>Définition 53 :</u> Si K est compact convexe de $\mathbb{R}^n$, symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non vide, on note $j_K(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda . K\}$.

<u>Proposition 54 :</u> j_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$

<u>Corollaire 55 :</u> Les boules unités fermées de normes de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les compacts convexes symétriques par rapport à $0 \in \mathring{K}$.