Espaces complets. Exemples et applications

NOM : n°205 Prénom :

Rouge entourez l'épreuve Bleu entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi :

Autre sujet :

I. Espaces complets

(X,d) sera dans cette partie un espace métrique

A) Définitions

Déf 1 : Une suite (x_n) de (X,d) est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, d(x_p,x_q) < \varepsilon$

rq 2 : Toute suite de Cauchy est bornée

Prop 3 : Toute suite convergente est de Cauchy.

Prop 4 : Une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence a une limite.

(Méthode de Héron)
Cex 5 : (x_n) définie par $x_0=1$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy, tend vers $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

Cex 6 : la valuation sur $K[X]$ avec K corps est :
$v(P) = \begin{cases} \min\{n, a_n \neq 0\} & \text{si } P \neq 0 \\ +\infty & \text{si } P = 0 \end{cases}$ et la distance

$d(P,Q) = \exp(-v(P-Q))$ avec $P,Q \in K[X]$

la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}\right)_n$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $(K[X],d)$

Déf 7 : Un espace (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

Ex 8 : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Cex 9 : $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

Rq 10 : La complétude est une notion métrique et non topologique. Elle n'est pas conservée par homéomorphisme.

Ex 11 : $(\mathbb{R}, d)$ avec $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ n'est pas complet.

Prop 12 : Soit (X,d) et (Y,d') métriques. Alors :
X et Y complets $\iff$ $X \times Y$ est complet pour la topologie produit

Ex 13 : $\mathbb{R}^n$ est complet.

Prop 14 : Toute partie complète de (X,d) est fermée.

Prop 15 : Tout fermé d'un espace complet est complet.

Prop 16 : Soit $(F_n)_n$ suite décroissante de fermés non vides de E avec $|F_n| = \sup_{x,y \in F_n} (d(x,y)) \to 0$ et E complet.
Alors il existe $x \in E$ tel que $\bigcap F_n = \{x\}$

B) Compacité et complétude

Prop 17 : Un espace métrique compact est complet

Ex 18 : $[0,1]$ est complet.

Déf 19 : Soit E $\mathbb{R}$-evn et $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts (non vides). On pose pour $A, B \in \mathcal{K}$
$d_H(A,B) = \max(\sup_{x \in B} d(x,A), \sup_{y \in A} d(y,B))$

Th 20 : d_H est une distance (dite de Hausdorff) et $(\mathcal{K}, d_H)$ est complet.

C) Complétion d'un espace métrique

Rq 21 : $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ n'est pas complet

Prop 22 : Soit (Y,d_Y) et (Z,d_Z) métriques complet. Si X est dense dans Y et si $f : X \to Z$ est uniformément continue alors f se prolonge d'une unique manière à Y en $\tilde{f}$ continue et $\tilde{f}$ est même uniformément continue.

Appl 23 : Permet de définir la transformée de Fourier sur L^2.

Th 24 : Pour (X,d), il existe un unique espace métrique complet (à isométrie près) contenant X comme sous-espace dense, noté $(\hat{X}, \hat{d})$.

Ex 25 : $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ est le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$
$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$
$(]0,1[)$ a pour complété $([0,1], |\cdot|)$

E de dimension finie (evn)

Prop 26 : Un espace vectoriel sur $(\mathbb{K}, d)$ corps complet vérifie :
$\forall \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normes sur E, $\exists C > 0$, tq $\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|_2$
Autrement dit, sur cet espace, toutes les normes sont équivalentes.

Ex 27 : Tout evdf sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}_p$ a ses normes équivalentes.

II - Premières applications de la complétude

A - Théorème du point fixe et EDO

Th 28 : (Picard)
Soit (X, d) complet non vide. Toute application f strictement contractante de X dans lui-même de rapport k admet un unique point fixe $\alpha \in X$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers α avec :
$\forall n \quad d(x_n, \alpha) \leq k^n d(x_0, \alpha)$

Prop 29 : L'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans un complet est complet pour la distance de la convergence uniforme.

déf 30 : Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue. On dit que f est localement lipschitzienne en y si :
$\forall (t_0, y_0) \in U, \exists r_0, T_0, k > 0,$
* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$
* $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$

Prop 31 : Soit $f \in C^0(U, \mathbb{R}^m)$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ avec $C_0 \subset U$. Posons $M = \sup_{C_0} \|f\|$ et $T \leq \min(T_0, r_0/M)$.
Soit $C_T = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$. Alors toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ avec $I \subseteq [t_0 - T, t_0 + T]$ de $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Th 32 : (Cauchy - Lipschitz local)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ localement lips en y et C_T comme dans prop 31. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$

Rq 33 : Avec les notations précédentes, on a pour tout $z \in C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$, la suite $\phi^n(z) \to y$ uniformément avec :
$\phi(z)(t) = y_0 + \int_t^{t_0} f(u, y(u)) du$

Ex 34 : $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une solution unique qui est $y : t \mapsto (t+1)^3$

Cex 35 : $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet deux solutions au voisinage de 0 : $y_1 = 0$ et $y_2 = a^3$ a cste.

Th 36 : (Cauchy - Lipschitz global)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ lipschitzienne en y avec $U = J \times \mathbb{R}^m$, J ouvert de $\mathbb{R}$, alors toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est globale.

Ex 37 : (Pendule sans frottement)
L'équation $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$ admet une solution sur $\mathbb{R}$.

B) Espaces L^p

déf 38 : Soit $1 \leq p < +\infty$. On pose :
$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $|f|^p \in L^1(\Omega)\}$ et
$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$ pour $f \in L^p(\Omega)$.

déf 39 : On pose $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $\exists C > 0$, $|f(x)| \leq C$, p.p. tout $x \in \Omega\}$.
et $\|f\|_\infty = \inf\{C, |f(x)| \leq C$ pp tout $x \in \Omega\}$ avec $f \in L^\infty(\Omega)$.

Th 40 : (Hölder)
Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
Alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

Th 41 : (Minkowski)
Pour $f, g \in L^p$ $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$

Cor 42 : $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$

Th 43 : (Riesz - Fischer)
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

déf 44 : H est un espace de Hilbert si c'est un ev muni d'un produit scalaire, complet pour la norme associée.

Th 45 : L^2 est un Hilbert.

suite

III - Le lemme de Baire et ses applications

A - Espaces de Baire

<u>déf 46</u>: Un espace topologique séparé non vide est de Baire si toute union dénombrable de fermés de E d'intérieur vide est d'intérieur vide dans E.

<u>Rq 47</u>: Ceci est équivalent à dire que toute intersection d'ouverts denses d'un espace de Baire est encore de Baire.

<u>Th 48</u>: . tout espace localement compact est de Baire.
. tout espace métrique complet est de Baire.
. tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

<u>Cor 49</u>: Tout ev de degré dénombrable (non fini) sur un corps complet ne peut être complet.

<u>Ex 50</u>: $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme
$\overline{\mathbb{Q}_p}$ n'est pas complet.

<u>Prop 51</u>: Le complété d'un espace algébriquement clos est encore algébriquement clos.

<u>Cor 52</u>: $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est complet <u>et</u> algébriquement clos

B - Applications

<u>déf 53</u>: On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F.

<u>Th 54</u>: (Application ouverte)
Soient E, F des espaces de Banach. Toute application surjective de $\mathcal{L}(E,F)$ est ouverte.

<u>Cor 55</u>: Soient deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E telles que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ pour tout $x \in E$.
Si E est complet pour chacune d'elles, les deux normes sont équivalentes.

<u>Th 56</u>: (Graphe fermé)
Soient E, F des espaces de Banach. Soit $u : E \to F$ linéaire. Soit G le graphe de u:
$G = \{(x,y) \in E \times F,\ y = u(x)\}$
Alors u est continue ssi G est fermé dans $E \times F$.

<u>Th 57</u>: (Banach - Steinhauss)
Soient deux evn E et F. Supposons E complet et $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ si $\forall x \in E$, $\sup_{u \in H} \|u(x)\| < +\infty$
Alors $\sup_{u \in H} \|u\| < +\infty$.

<u>Cor 58</u>: Si $u_n \xrightarrow[\text{simplement}]{} u$ et $(u_n) \in \mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$
Alors $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si $x_n \to x$, alors $u_n(x_n) \to u(x)$.

<u>Th 59</u>: L'ensemble des fonctions continues dérivables nulle part est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ complet. dev 2