Leçon 264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Le jury attend des candidates et candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles du programme soient présentées, ainsi que leurs liens éventuels. Il est important de proposer quelques exemples de modélisation faisant intervenir ces lois. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) doivent être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples riches.
Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 264 intitulée : "Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.". Les variables aléatoires discrètes sont les premières variables aléatoires que l'on rencontre en théorie des probabilités et dans la vie quotidienne, il est donc important de bien les connaître.
Dans une première partie on s'intéresse aux généralités sur les variables aléatoires discrètes en commençant par quelques définitions et propriétés. On introduit ainsi la définition d'une variable aléatoire (discrète) puis celle de loi d'une variable aléatoire. On montre ensuite que la loi est entièrement déterminée par la probabilité de chaque atome dans le cas discret puis on donne deux exemples ainsi que la définition de la fonction de répartition. Dans une deuxième partie on s'intéresse aux lois discrètes en donnant les contextes d'apparition de ces lois ainsi qu'en annexe un tableau qui résume les principales propriétés de ces lois (Densité, fonction de répartition, fonction caractéristique, espérance et variance). On termine cette partie avec un dernier point consacrée à la notion d'indépendance. Cette notion est très importante car comme on le verra par la suite, il est difficile d'avancer en probabilités (et dans les calculs !) sans avoir une hypothèse d'indépendance. On définit donc les notions d'événements et de variables aléatoires indépendantes avant d'examiner le cas particulier des variables aléatoires discrètes.
Dans une deuxième partie on en vient à l'étude des moments d'une variable aléatoire : on commence par parler d'espérance et de variance. On introduit pour cela la définition et les principales propriétés de l'espérance ainsi que le théorème du transfert qui est très utile en pratique (notamment pour déterminer la loi d'une variable aléatoire). On définit ensuite de manière plus générale les moments d'ordre p avant de passer à la variance et l'écart-type ainsi qu'à la covariance et quelque-unes de leurs propriétés de base. On termine ce point en donnant une application de l'indépendance et des moments d'ordre 1 et 2 avec le théorème de Weierstrass et on rappelle également les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Dans un deuxième point on s'intéresse aux fonctions génératrices qui sont un outil à la fois spécifique aux variables aléatoires discrètes et à la fois extrêmement puissant. On définit tout d'abord la fonction génératrice avant de regarder son comportement vis-à-vis des moments et de l'indépendance ainsi que quelques exemples. On termine cette deuxième partie par le processus de Galton-Watson en rappelant de quoi il s'agit ainsi que quelques propriétés.
Enfin on termine cette leçon avec une dernière partie consacrée aux théorèmes limites. On commence par le cas de la convergence en loi avec la définition puis le lien avec la fonction caractéristique via le théorème de Lévy qui ramène l'étude de la convergence en loi à un problème de convergence simple des fonctions caractéristiques. On donne ensuite d'autres critères de convergence en loi avec la fonction génératrice ainsi que les fonctions de répartitions puis quelques applications. Dans un deuxième point on parle des lois des grands nombres et du théorème central limite en commençant par la loi faible des grands nombres puis la loi forte des grands nombres ainsi qu'une interprétation statistique en exemple 68 qui est le phénomène de stabilisation des

fréquences. On conclut enfin avec le théorème central limite ainsi que plusieurs applications : en statistiques avec les corollaires 71 et 72 ainsi que la proposition 73 (construction d'intervalles de confiance) puis en analyse avec la formule de Stirling.
On trouvera également en annexe un tableau contenant toutes les informations pratiques sur les lois discrètes usuelles.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

I Généralités sur les variables aléatoires discrètes

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Variable aléatoire (réelle) [Chabanol, p.21] :
On appelle **variable aléatoire** (réelle lorsque $E = \mathbb{R}$) toute application mesurable $X : \Omega \longrightarrow E$.

Définition 2 : Loi d'une variable aléatoire [Chabanol, p.21] :
On appelle **loi de** X la mesure image de $\mathbb{P}$ par X et on la note $\mathbb{P}_X$.
On a donc pour tout $B \in \mathcal{E}$:

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in B\})$$

Définition 3 : Variable aléatoire discrète [Chabanol, p.21] :
Lorsque E est au plus dénombrable, on dit que X est une **variable aléatoire discrète** (et dans ce cas, on prend souvent $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$).

Proposition 4 : [Chabanol, p.21]
La loi d'une variable aléatoire discrète X est donnée par : $\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$, où $p_x = \mathbb{P}(X = x)$.

Corollaire 5 : [Chabanol, p.21]
La loi de X est caractérisée par la famille $(p_x)_{x \in E}$.

Exemple 6 : [Chabanol, p.21]
$*$ En lançant un dé deux fois, on peut définir X la variable aléatoire égale à la somme des résultats des dés. Dans ce cas, $\Omega = [\![1;6]\!]^2$, $E = [\![2;12]\!]$ et :

$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36},\ p_3 = p_{11} = \frac{2}{36},\ p_4 = p_{10} = \frac{3}{36},\ p_5 = p_9 = \frac{4}{36},\ p_6 = p_8 = \frac{5}{36} \text{ et } p_7 = \frac{6}{36}$$

$*$ En imaginant lancer une pièce une infinité de fois, on peut définir Y la variable aléatoire au premier lancer donnant un pile ($\mathbb{P}_Y$ est donnée en I.2).

Définition 7 : Fonction de répartition [Chabanol, p.23] :
On considère X une variable aléatoire réelle.
La fonction :
$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array} \right.$$
est appelée **fonction de répartition de** X.
En particulier, si X est discrète, alors F_X est en escalier.

Exemple 8 :
Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$, alors :
$$F_X(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < 1 \\ \frac{\lfloor h \rfloor}{n} & \text{si } h \in [1;n[\\ 1 & \text{si } h \geq n \end{cases}$$

I.2 Lois discrètes usuelles

Les variables aléatoires discrètes les plus classiques sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ (voire $\mathbb{N}^*$ pour la loi géométrique). On trouvera en annexe les propriétés de ces lois.

Contextes d'apparition :
$*$ On lance une pièce équilibrée et on note $X = 1$ si le résultat est "face" et 0 sinon. Alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1/2)$.
$*$ Si on lance n fois la pièce de manière indépendante, le nombre X de succès suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
$*$ Le résultat du jet d'un dé à 6 faces équilibré se modélise par la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1;6 \rrbracket)$.
$*$ On note ℓ le nombre moyen de personnes se présentant à un guichet chaque minute. Le nombre de personnes se présentant pendant N minutes peut se modéliser par la loi $\mathcal{P}(N\ell)$.
$*$ On lance une pièce équilibrée et on note X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir "face". Alors $X \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

I.3 Autour de la notion d'indépendance

Définition 9 : Événements indépendants [Ouvrard, p.54] :
$*$ On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont des **événements indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
$*$ Une famille d'événements $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I$ est dite **indépendante** lorsque pour toute partie finie non vide J de I on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$ (on parlera d'**indépendance dans leur ensemble**).

Remarque 10 : [Ouvrard, p.54]
Attention, des événements peuvent être indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble.

Définition 11 : Variables aléatoires indépendantes [Ouvrard, p.57] :
On considère $X_1 : \Omega \longrightarrow (E_1, \mathcal{E}_1)$ et $X_2 : \Omega \longrightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$.
On dit que X_1 et X_2 sont des **variables aléatoires indépendantes** lorsque pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ les événements $(X_1 \in A_1)$ et $(X_2 \in A_2)$ sont indépendants.

Proposition 12 : [Ouvrard, p.59]
Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires discrètes.
X_1 et X_2 sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on a $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)$.

Remarque 13 : [Ouvrard, p.59]
On généralise ces propriétés à une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires (discrètes).

Proposition 14 : [Ouvrard, p.61]
Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions.
Si les X_i sont indépendantes, alors les $f(X_i)$ le sont également.

Exemple 15 : [Ouvrard, p.61]
Si X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2$ et $X_3 - X_4$ sont indépendantes.

Proposition 16 : [Ouvrard, p.62]
Soient X_1 et X_2 deux variables discrètes et indépendantes.
Pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_{X_1+X_2}(\{x\}) = \sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}_{X_1}(\{x_1\})\, \mathbb{P}_{X_2}(\{x - x_1\})$.
On appelle alors $\mathbb{P}_{X_1+X_2}$ la convolution de $\mathbb{P}_{X_1}$ et $\mathbb{P}_{X_2}$ et on la note $\mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2}$.

Exemple 17 : [Ouvrard, p.63 + 70]
$*$ On considère $X, Y \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$ et $Z = X + Y$.
Z suit alors la loi donnée par $\mathbb{P}(Z = k) = \frac{k+1}{(n+1)^2}\mathbb{1}_{k \in \llbracket 0;n \rrbracket} + \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}\mathbb{1}_{k \in \llbracket n+1;2n \rrbracket}$.
$*$ On considère $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.
Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

II Moments et fonction génératrice

Dans toute cette partie, on considère X une variable aléatoire discrète.

II.1 Espérance, variance et formule du transfert

Définition 18 : Espérance [Ouvrard, p.115] :
Lorsque la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ est sommable on dit que X possède une moyenne et on note $\mathbb{E}(X)$ le nombre $\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x)$ et on l'appelle **espérance**.

Proposition 19 : [Ouvrard, p.117]

$*$ L'espérance est linéaire et croissante.
$*$ Si $|X|$ est majorée, alors X possède une moyenne.
$*$ Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
Si de plus $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $X \underset{p.s.}{=} 0$.
$*$ $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Théorème 20 : Théorème du transfert [Ouvrard, p.118] :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$f(X)$ admet une moyenne si, et seulement si, $\sum_{x \in E} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) < +\infty$.
Dans ce cas, on note $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.

Exemple 21 :

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\{x_1, ..., x_n\})$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (on retrouve la moyenne arithmétique).

Définition 22 : Moment d'ordre p [Ouvrard, p.122] :

On considère $p \geq 1$.
On dit que X possède un **moment d'ordre** p lorsque $\mathbb{E}\left(|X|^p\right)$.

Proposition 23 : Inégalité de Hölder [Ouvrard, p.123] :

Soient p, q conjugués et X, Y deux variables aléatoires réelles.
Si X admet un moment d'ordre p et Y un moment d'ordre q, alors XY admet une moyenne et $\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left(|X|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Définition 24 : Variance/écart-type [Ouvrard, p.127] :

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.
On appelle :
$*$ **variance de** X la quantité $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.
$*$ **écart-type de** X la quantité $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Remarque 25 : [Ouvrard, p.127]

Par le théorème du transfert, on a $\mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in E} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$.

Proposition 26 : [Ouvrard, p.128]

Si X admet un moment d'ordre 2, alors :
$*$ $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$ (formule de König-Huygens).
$*$ $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.

Définition 27 : Covariance [Ouvrard, p.128] :

On considère X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **covariance de** X **et** Y la quantité :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Proposition 28 : [Ouvrard, p.129]

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2.
$\mathrm{Var}(X, Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Proposition 29 : [Ouvrard, p.129]

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS]

Lemme 30 : [Deschamps, p.994]

Soient f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in [0; 1]$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$ et $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (t, u) \in [0; 1]^2,\ |f(t) - f(u)| \leq M(t - u)^2 + \varepsilon$$

En particulier, on a $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq M\,\mathrm{Var}(Y_n) + \varepsilon \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$

Théorème 31 : Théorème de Weierstrass [Deschamps, p.994] :

Si l'on considère les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{k}{n} x^k (1 - x)^{n-k}$$

alors la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

Corollaire 32 : [Deschamps, p.530]

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[0; 1]$.

Remarque 33 : [Ouvrard, p.130]

Attention, la réciproque n'est pas vraie en général.

Proposition 34 : Inégalité de Markov [Chabanol, p.38] :

Soit $a > 0$.
Si X admet un moment d'ordre 1, alors $\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

Proposition 35 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev [Chabanol, p.38] :

Soit $\varepsilon > 0$.
Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.

Théorème 36 : Théorème de Bernoulli :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite indépendante et identiquement distribuée de variables aléatoires réelles de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$, alors pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{4na^2}$.

II.2 Séries génératrices

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 37 : Série génératrice [Deschamps, p.949] :
On appelle **série génératrice de** X la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Remarque 38 : [Deschamps, p.949]
$*$ Par le théorème du transfert, $G_X(t)$ est défini si, et seulement si, $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ converge absolument et on a alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=x)t^n$.
$*$ La série entière $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, elle est définie, converge normalement sur $\mathcal{D}_f(0,1)$ et est continue sur $[-1;1]$.

Proposition 39 : [Deschamps, p.949]
La loi de X est entièrement déterminée par G_X.
Plus précisément, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = n! G_X^{(n)}(0)$.

Exemple 40 : [Deschamps, p.950]
Si X est une variable aléatoire réelle de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$. On retrouve bien le fait que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Proposition 41 : [Chabanol, p.42]
Soient Y et Z deux variables aléatoires portées par $\mathbb{N}$.
Si Y et Z sont indépendantes, alors $G_{Y+Z} = G_Y G_Z$.

Exemple 42 : [Chabanol, p.42]
On considère Y et Z deux variables aléatoires indépendantes suivants respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
Alors la variable aléatoire $Y+Z$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Théorème 43 : [Deschamps, p.950]
X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et on a alors $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

Théorème 44 : [Deschamps, p.950]
X possède un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et on a alors $G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$.

Corollaire 45 : [Deschamps, p.950]
Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors X possède un moment d'ordre 2 et on a alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = G_X''(1) + G_X'(1)$.

Proposition 46 : [Chabanol, p.42]
Soit Y une variable aléatoire réelle portée par $\mathbb{N}$.
G_Y est m fois dérivable à gauche en 1 si, et seulement si, X a un moment d'ordre m.
Dans ce cas, on a $G_X^{(m)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)...(X-m+1))$

Remarque 47 : [Chabanol, p.42]
On retrouve ainsi les résultats ci-dessus sur l'espérance et la variance.

Théorème 48 : [Chabanol, p.43]
Soient $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des Y_i.
Si l'on pose $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$, alors la fonction génératrice de S_N vérifie $G_{S_N} = G_N \circ G_{Y_1}$.
De plus, si X_1 et N admettent une espérance, alors S_N admet une espérance et $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

Exemple 49 : [Chabanol, p.42]
Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ et les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre p, on a alors S qui suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

II.3 Processus de Galton-Watson

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi notée μ admettant une espérance notée m, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X=k)$ et on suppose que $p_0 \in]0;1[$.

Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de X. On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction la probabilité d'extinction à l'instant n, $P_{\text{ext}} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction de la population et G_n la fonction génératrice de Z_n.

Lemme 50 : [Gourdon, p.345]
* G est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0;1]$.
* G est strictement croissante sur $[0;1]$.
* G est strictement convexe sur $]0;1]$ si, et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

Proposition 51 : [Gourdon, p.376]
* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} = G \circ G_n$, avec G la série génératrice de X et de plus $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.
* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

Théorème 52 : [Gourdon, p.376]
* P_{ext} est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur $]0;1]$.
* Si $m \leq 1$ (cas sous-critique et critique), alors $P_{ext} = 1$.
* Si $m > 1$ (cas super-critique), alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

III Théorèmes limites

III.1 Convergence en loi

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 53 : Convergence en loi [Chabanol, p.57] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Lemme 54 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 55 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array} \right.$$

Exemple 56 :
* Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1 - p + pe^{it}$.
* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
* Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Théorème 57 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
* La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Proposition 58 :
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour tout $t \in [0;1]$, $\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$.

Proposition 59 : [Chabanol, p.59]
Si les X_n et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

Théorème 60 : [Chabanol, p.64]
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ $(\lambda > 0)$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Théorème 61 : [Berhuy, p.714]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire de permutations sans points fixes).

Pour tout entier naturel n, on a $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ et $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Proposition 62 : [Caldero, p.303]
Soit $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$.
Si F_n est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de points fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors pour tout $r \in [\![0;n]\!]$ on a $\mathbb{P}(F_n = r) = \dfrac{\binom{n}{r} D_{n-r}}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \dfrac{1}{r!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$.

De plus, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson de paramètre 1 et on a $\mathbb{E}(F_n) = \mathrm{Var}(F_n) = 1$.

III.2 Loi forte des grands nombres et théorème central limite

Théorème 63 : Loi faible des grands nombres [Chabanol, p.55] :
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si $\mathbb{E}\left(Y_1^2\right) < +\infty$, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Remarque 64 : [Chabanol, p.56]
Le résultat reste vrai sous des hypothèses moins fortes. En effet, on peut demander que la suite $\left(\mathbb{E}(Y_n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et que les espérances de chaque Y_i sont identiques ou bien encore que les Y_i soient juste deux à deux indépendants.

Proposition 65 : [Chabanol, p.56]
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si $\mathbb{E}\left(Y_1^4\right) < +\infty$, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Théorème 66 : Loi forte des grands nombres [Chabanol, p.53] [ADMIS] :
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si les Y_i sont intégrables, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Corollaire 67 : [Chabanol, p.53]
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité, alors on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} \mathbb{P}(A_1)$.

Exemple 68 : [Chabanol, p.53]
Si on lance une infinité de fois un dé et que l'on note A_n l'événement "Avoir un 6 au n-ième lancer", alors la proposition de 6 obtenus au cours des n premiers lancers tend vers $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{6}$.

Remarque 69 : [Chabanol, p.173]
La moyenne empirique $\overline{Y_n}$ est un estimateur sans biais et (fortement) convergent de $\mathbb{E}(Y_1)$ par la loi forte des grands nombres.

Théorème 70 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

Corollaire 71 : [Chabanol, p.62]
Soit $a > 0$.
Avec les même hypothèses que le théorème central limite, on a :

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\overline{X_n} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X_n} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Dans le cas de lois de Bernoulli, on obtient alors :

Corollaire 72 : [Chabanol, p.63]
Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors la suite $\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

On a également la généralisation suivante :

Proposition 73 : Delta-méthode [Chabanol, p.63] :
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dérivable en θ telle que $g'(\theta) \neq 0$.
S'il existe deux réels θ et σ tels que la suite $(\sqrt{n}(X_n - \theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1\left(0, \sigma^2\right)$, alors la suite $(\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1\left(0, \sigma^2 (g'(\theta))^2\right)$.

Développement 2 : [cf. FRANCINOU]

Lemme 74 : [Francinou, p.165]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.

Proposition 75 : [Francinou, p.165]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.
Si l'on a $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ alors $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Théorème 76 : Formule de Stirling [Francinou, p.165] :
On a l'équivalent : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

IV Annexe

IV.1 Tableau des lois usuelles

Lois	Dirac de paramètre a	Uniforme-discrète de paramètre n	Bernoulli de paramètre p
Densités	δ_a	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k$	$(1-p)\delta_0 + p\delta_1$
Fonctions de répartition	$\mathbb{1}_{[a;+\infty[}(x)$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$	$(1-p)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$ $+p\mathbb{1}_{[1;+\infty[(x)}$
Fonctions caractéristiques	e^{ita}	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{itk}$	$1-p+pe^{it}$
Espérances	a	$\frac{n+1}{2}$	p
Variances	0	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$

Lois	Rademacher de paramètre p	Binomiale de paramètres n et p
Densités	$(1-p)\delta_{-1} + p\delta_1$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\delta_k$
Fonctions de répartition	$(1-p)\mathbb{1}_{[-1;+\infty[}(x)$ $+p\mathbb{1}_{[1;+\infty[(x)}$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$
Fonctions caractéristiques	$(1-p)e^{-it}+pe^{it}$	$\left(1-p+pe^{it}\right)^n$
Espérances	$2p-1$	np
Variances	$4p(1-p)$	$np(1-p)$

Lois	Géométrique de paramètre p	Poisson de paramètre α
Densités	$\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}\delta_k$	$\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}\delta_k$
Fonctions de répartition	$\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$	$\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}\mathbb{1}_{[k;+\infty[}(x)$
Fonctions caractéristiques	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$	$e^{\alpha(e^{it}-1)}$
Espérances	$\frac{1}{p}$	α
Variances	$\frac{1-p}{p^2}$	α

Remarques sur le plan

— On peut également s'intéresser au conditionnement et aux chaînes de Markov.

Liste des développements possibles

— Théorème de Weierstrass.

— Processus de Galton-Watson.

— Formule de Stirling par le TCL.

Bibliographie

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.

— Jean-Yves Ouvrard, *Probabilité 1 - Licence/Capes*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Analystan*.

— Serge Francinou, *Oraux X-ENS, Mathématiques, Tome 6*.