Leçon 262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires doivent être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Ainsi, les implications entre les divers modes de convergence, et les réciproques partielles doivent être connues. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au coeur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, peut être présentée. Les liens de ces théorèmes limite avec les questions d'estimation ponctuelle, d'estimation par intervalle de confiance en statistique, ont leur place dans cette leçon.
Les candidates et candidats solides peuvent aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, la méthode de Monte Carlo, le théorème central limite dans $\mathbb{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 262 intitulée : "Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.". Il existe différentes notions de convergence en probabilité et qui ont un rôle central ainsi que divers implications. Le but de cette leçon est de voir les différents liens entre ces modes de probabilité ainsi que divers résultats qui en découlent.
On commence dans une première partie par parler des différents modes de convergence en allant de la convergence la plus forte à la plus faible (comme on le verra plus tard). En ce qui concerne la convergence presque-sûre, on en donne la définition ainsi que des conditions de convergence presque-sûre grâce au lemme de Borel-Cantelli et on termine ce premier point par les propositions 5 et 6 ainsi qu'un exemple. Dans un deuxième point on parle de la convergence en moyenne d'ordre p en donnant la définition ainsi que deux résultats. On continue ensuite avec le cas de la convergence en probabilité : on donne la définition de la convergence en probabilité et on regarde ce qui se passe au travers d'une fonctions avant de rappeler les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev qui sont souvent utiles pour montrer une convergence en probabilité. On termine cette partie par la convergence en loi en donnant uniquement quelques points puisque nous en reparlerons dans la prochaine partie de manière plus détaillée.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux liens entre les différents modes de convergence et l'on commence par étudier des caractérisations de la convergence en loi qui est l'une des plus utilisée via le TCL (cf. III.2). On énonce le lemme de Slutsky ainsi que le théorème de Lévy qui ramène un problème de convergence en loi à un problème de convergence simple de fonctions caractéristiques. On donne ensuite le théorème 29 et on passe dans le cas de variables aléatoires réelles portées par $\mathbb{N}$ via la proposition 31 ainsi que deux applications avec le théorème 32 et la proposition 34. On parle ensuite des liens entre les différents modes de convergence dans un deuxième point. On donne alors des implications ainsi que des contre-exemples aux réciproques (on trouvera en annexe un schéma détaillé reprenant ces implications).
Enfin dans une dernière partie on s'intéresse aux théorèmes limites avec en premier lieu la loi forte des grands nombres. On introduit tout d'abord la loi faible des grands nombres avant de passer au cas de la loi forte des grands nombres ainsi qu'un exemple d'application. Ces lois des grands nombres ont une grande importance en statistique avec le phénomène de stabilisation des fréquences qui est souvent utilisé pour introduire le concept de probabilité. On conclut finalement cette leçon avec le théorème central limite qui possède encore des applications en statistique comme la création d'intervalles de confiance et la proposition 58 ainsi que deux corollaires.
Finalement, on trouvera également en annexe un schéma des différents lien entre les modes de convergence en probabilité.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ également.

I Modes de convergence

I.1 Convergence presque-sûre

Définition 1 : Convergence presque-sûre [Chabanol, p.49]
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge presque-sûrement vers** X lorsqu'il existe un ensemble $C \in \mathcal{F}$ de probabilité 1 sur lequel la suite converge ponctuellement et on note $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}-p.s.}{\longrightarrow}} X$.

Remarque 2 : [Chabanol, p.49]
* Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers X, alors la limite est $\mathbb{P}-p.s.$ unique.
* On remarque que l'on a :

$$\{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) = \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)\} = \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \left\{\omega \in \Omega \text{ tq } |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{p}\right\}$$

Cette écriture ne faisant apparaître que des intersections et des unions dénombrables, elle peut s'avérer utile pour démontrer une convergence presque-sûre.

Proposition 3 : [Chabanol, p.51]
Si X est une variable aléatoire telle que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on ait $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers X.

Proposition 4 : [Chabanol, p.51]
Si les X_n sont indépendants, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers 0 si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$.

Proposition 5 : [Chabanol, p.52]
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^k$.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers X, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $f(X)$.

Proposition 6 : [Chabanol, p.52]
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant presque-sûrement repsectivement vers Y et Z.
La suite $(Y_n + Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $Y + Z$.

I.2 Convergence en moyenne d'ordre p

Dans toute cette sous-partie, on considère $p \geq 1$.

Définition 7 : Convergence en moyenne d'ordre p [Chabanol, p.49] :
On suppose que les X_n et X admettent un moment d'ordre p.
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en moyenne d'ordre p vers X** lorsque $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = 0$.

Remarque 8 : [Ouvrard, p.98]
$*$ Si $p = 1$ (resp. $p = 2$), on dit que la suite **converge en moyenne** (resp. **converge en moyenne quadratique**).
$*$ Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p, alors sa limite est $\mathbb{P}-p.s.$ unique.

Proposition 9 : [Chabanol, p.52]
Si les X_n sont des variables aléatoires réelles de carré intégrable, qu'il existe une constante a telle que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = a$ et que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers a.

Proposition 10 : [Chabanol, p.52]
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant en moyenne d'ordre p repsectivement vers Y et Z.
La suite $(Y_n + Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers $Y + Z$.

I.3 Convergence en probabilité

Définition 11 : Convergence en probabilité [Chabanol, p.49] :
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité vers** X lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ et on note $X_n \underset{N\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} X$.

Proposition 12 : [Chabanol, p.52]
Si les X_n sont des variables aléatoires réelles de carré intégrable, qu'il existe une constante a quelle que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = a$ et que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers a.

Proposition 13 : [Chabanol, p.52]
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^k$.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Proposition 14 : [Chabanol, p.52]
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant en probabilité repsectivement vers Y et Z.
La suite $(Y_n + Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en probabilité vers $Y + Z$.

Exemple 15 : [Ouvrard, p.95]
On considère $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant en probabilité repsectivement vers Y et Z.
La suite $(< Y_n ; Z_n >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $< Y, Z >$ et la suite $(\max(Y_n, Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\max(Y, Z)$.

On rappelle également les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev :

Proposition 16 : Inégalité de Markov [Chabanol, p.38] :
Soit $a > 0$.
Si X admet un moment d'ordre 1, alors $\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

Proposition 17 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev [Chabanol, p.38] :
Soit $\varepsilon > 0$.
Si X admet un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.

Remarque 18 :
Il est souvent judicieux d'utiliser les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev pour montrer une convergence en probabilité.

I.4 Convergence en loi

Définition 19 : Convergence en loi [Chabanol, p.57] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Développement 1 : [A] [cf. QUEFFELEC]

Lemme 20 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Remarque 21 : [Chabanol, p.60]
La convergence en loi n'est pas compatible avec l'addition en général.
En effet, on peut prendre $X \rightsquigarrow \mathcal{R}\left(\frac{1}{2}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = Y_n = -X$.

Cependant, on a tout de même résultat suivant :

Proposition 22 : [Chabanol, p.60]
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^k$.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

II Théorèmes et propriétés de convergence

II.1 Caractérisation de la convergence en loi

Définition 23 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array} \right.$$

Exemple 24 :
* Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1 - p + pe^{it}$.
* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
* Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Lemme 25 : Lemme de Slutsky [Chabanol, p.61] :
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles.
Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Y et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire constante a, alors la suite $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers (X, a).
En particulier, $(Y_n + Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $Y + a$ et $(Y_n Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers aY.

Développement 2 : [B] [cf. QUEFFELEC]

Théorème 26 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
* La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Le théorème ci-dessous apporte quelques précisions :

Théorème 27 : [Chabanol, p.58]
Si $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Ψ continue en 0, alors Ψ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X.
De plus, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

Théorème 28 : [Chabanol, p.58]
On suppose que les X_n et X sont des variables aléatoires réelles.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour tout point t de continuité de F_X, on a $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$.

Exemple 29 : [Chabanol, p.59]
Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \rightsquigarrow \delta_{\frac{1}{n}}$, alors on a $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en loi vers $X \rightsquigarrow \delta_0$.

Proposition 30 : [Chabanol, p.59]
Si les X_n et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

Théorème 31 : [Chabanol, p.64]
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ $(\lambda > 0)$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Théorème 32 : [Berhuy, p.714]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire de permutations sans points fixes).
Pour tout entier naturel n, on a $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$ et $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Proposition 33 : [Caldero, p.303]
Soit $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$.
Si F_n est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de points fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors pour tout $r \in [\![0; n]\!]$ on a $\mathbb{P}(F_n = r) = \dfrac{\binom{n}{r} D_{n-r}}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \dfrac{1}{r!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$.
De plus, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson de paramètre 1 et on a $\mathbb{E}(F_n) = \mathrm{Var}(F_n) = 1$.

Lemme 34 : Lemme de Scheffé [Chabanol, p.59] :
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant pour densités respectives f_n et Y une variable aléatoire ayant pour densité f.
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^1 et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Y.

Remarque 35 : [Chabanol, p.60]
Une suite de variables aléatoires à densité peut converger en loi vers une variable aléatoire à densité sans que les densités ne convergent.

Exemple 36 : [Hauchecorne, p.361]
On considère la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ et de terme général $F_n : x \longmapsto \left(x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right) \mathbb{1}_{[0;1]}(x) + \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$.
La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction de répartition de la loi uniforme, cependant la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite pour tout $x \in [0; 1]$.

Remarque 37 : [Chabanol, p.60]
Une suite de variables aléatoires à densité peut converger en loi vers une variable discrète (et une suite de variables aléatoires discrètes peut converger en loi vers une variable aléatoire à densité).

II.2 Lien entre les différents modes de convergence

Théorème 38 : [Chabanol, p.50]
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement, alors elle converge en probabilité et les limites sont $\mathbb{P}-p.s.$ égales.

Théorème 39 : [Chabanol, p.50]
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, alors il existe une sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque-sûrement vers X.

Remarque 40 : [Ouvrard, p.93]
La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque-sûrement en général. En effet, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans 0 et 1 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ converge en probabilité vers 0 mais pas presque-sûrement.

Théorème 41 : [Chabanol, p.50]
Soit $p \geq 1$.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p, alors elle converge en probabilité.

Remarque 42 : [Ouvrard, p.101]
La réciproque est fausse en général. En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_0$, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0 mais pas dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Proposition 43 : [Chabanol, p.60]
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, alors elle converge en loi vers X.

Corollaire 44 : [Chabanol, p.61]
Soit $p \geq 1$.
La convergence presque-sûre et la convergence en moyenne d'ordre p impliquent la convergence en loi.

Remarque 45 : [Hauchecorne, p.362]
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général.
En effet, si $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$, alors on a la convergence en loi mais pas en probabilité.

Bien que la réciproque de la proposition précédente est fausse en général, mais elle est vraie lorsque la limite est constante :

Proposition 46 : [Chabanol, p.61]
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire a constante, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilités vers a.

III Théorèmes limites

III.1 Loi forte des grands nombres

Théorème 47 : Loi faible des grands nombres [Chabanol, p.55] :
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si $\mathbb{E}\left(Y_1^2\right) < +\infty$, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Remarque 48 : [Chabanol, p.56]
Le résultat reste vrai sous des hypothèses moins fortes. En effet, on peut demander que la suite $\left(\mathbb{E}(Y_n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et que les espérances de chaque Y_i sont identiques ou bien encore que les Y_i soient juste deux à deux indépendantes.

Proposition 49 : [Chabanol, p.56]
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si $\mathbb{E}\left(Y_1^4\right) < +\infty$, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Théorème 50 : Loi forte des grands nombres [Chabanol, p.53] [ADMIS] :
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.
Si les Y_i sont intégrables, alors $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$.

Corollaire 51 : [Chabanol, p.53]
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité, alors on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{P}(A_1)$.

Exemple 52 : [Chabanol, p.53]
Si on lance une infinité de fois un dé et que l'on note A_n l'événement "Avoir un 6 au n-ième lancer", alors la proposition de 6 obtenus au cours des n premiers lancers tend vers $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{6}$.

Remarque 53 : [Chabanol, p.173]
La moyenne empirique $\overline{Y_n}$ est un estimateur sans biais et (fortement) convergent de $\mathbb{E}(Y_1)$ par la loi forte des grands nombres.

III.2 Théorème central limite

Développement 3 : [C] [cf. QUEFFELEC]

Théorème 54 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

Corollaire 55 : [Chabanol, p.62]
Soit $a > 0$.
Avec les mêmes hypothèses que le théorème central limite, on a :

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\overline{X_n} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X_n} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Dans le cas de lois de Bernoulli, on obtient alors :

Corollaire 56 : [Chabanol, p.63]
Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors la suite $\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

On a également la généralisation suivante :

Proposition 57 : Delta-méthode [Chabanol, p.63] :
Soient $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dérivable en θ telle que $g'(\theta) \neq 0$.
S'il existe deux réels θ et σ tels que la suite $(\sqrt{n}(X_n - \theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1(0,\sigma^2)$, alors la suite $(\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}_1\left(0, \sigma^2(g'(\theta))^2\right)$.

Développement 4 : [cf. FRANCINOU]

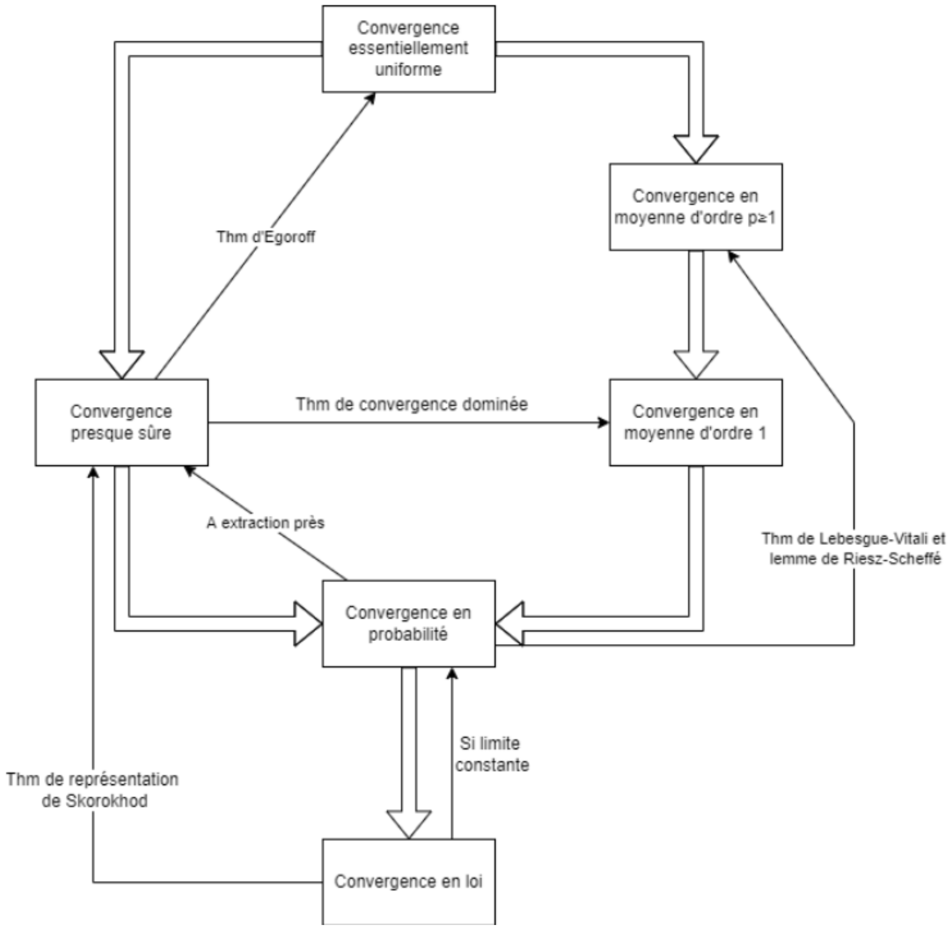
Lemme 58 : [Francinou, p.165]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.

Proposition 59 : [Francinou, p.165]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1.
Si l'on a $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ alors $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Théorème 60 : Formule de Stirling [Francinou, p.165] :
On a l'équivalent : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

IV Annexe

IV.1 Lien entre les différents modes de convergence



Remarques sur le plan

- Faire le lien entre le théorème central limite et les résultats de statistique.
- Il faut bien insister sur la convergence en loi qui est "spéciale" comparée aux autres modes de convergence.

Liste des développements possibles

- Théorème de Lévy + TCL.
- Formule de Stirling par le TCL.

Bibliographie

- Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.
- Jean-Yves Ouvrard, *Probabilité 2 - Master/Agrégation*.
- Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.
- Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.
- Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Analystan*.
- Bertrand Hauchecorne, *Les contre exemples en mathématiques*.
- Serge Francinou, *Oraux X-ENS, Mathématiques, Tome 6*.