Leçon 253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Extrait du rapport de jury

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi plusieurs pistes très riches pour élaborer la leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques en analyse et en probabilité, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc.
Il est important de développer cette leçon dans son cadre géométrique naturel, en n'hésitant pas à l'illustrer par de nombreux dessins.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion d'uniforme convexité et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 253 intitulée : "Utilisation de la notion de convexité en analyse.". La convexité est une propriété forte sur des ensembles ou des fonctions, qui va se traduire par tout un tas de propriétés, caractérisations, et qui va offrir un cadre très adéquat pour les problèmes d'optimisation. La définition de la convexité est une propriété de dimension finie (nombre fini de points), donc on va pouvoir avoir des raisonnements géométriques, notamment dans les espaces de Hilbert.
Dans un premier temps, on commence par parler de parties convexes ainsi que de leurs utilisations. On commence dans un premier temps par parler de la notion de partie convexe avec la définition d'un segment, d'une partie convexe et d'une partie étoilée qui sont reliés dans un espace vectoriel normé comme on peut le voir en remarque 4. On donne ensuite un exemple de sous-ensemble convexe dans le cas de $\mathbb{R}$ avant de continuer par quelques propriétés et de finir ce premier point par la notion d'enveloppe convexe. Dans un deuxième point on parle de convexité dans les Hilbert (comme mentionné en introduction) avec une application à la projection sur un convexe fermé, puis un sous-espace vectoriel ainsi qu'un corollaire sur les sous-espaces. On termine cette première partie avec des applications de la convexité en analyse complexe avec les théorèmes de Goursat et de Cauchy pour un convexe qui sont très importants ! Dans un deuxième temps, on parle des fonctions convexes en commençant par rappeler les définitions de base avant de passer au cas des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ avec une caractérisation par l'épigraphe puis l'inégalité des pentes. On donne ensuite un lien entre la convexité et la fonction dérivée et la dérivée seconde (lorsqu'elles sont bien définies) qui est très utile en pratique. On termine ce point avec deux résultats d'optimisation avant de passer au cas des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ avec comme résultat majeur la caractérisation d'une fonction convexe par la hessienne positive.
On termine cette leçon avec une dernière partie consacrée à quelques applications avec tout d'abord les inégalités de convexité qui sont surtout utilisées comme des outils, notamment les propositions 44 et 53. On étudie ensuite la fonction Γ d'Euler sur $\mathbb{R}$ dans un deuxième point en donnant quelques propriétés ainsi que le théorème de Bohr-Mollerup avant de finir avec un dernier point sur le processus de Galton-Watson. On rappelle brièvement la définition d'une série génératrice ainsi que le fonctionnement d'un processus de Galton-Watson avant de démontrer quelques résultats sur ce dernier.
On trouvera aussi en annexe une représentation graphique de la convexité, d'une fonction convexe, de l'inégalité des pentes ainsi que de l'allure de Γ et de G ainsi que ses points fixes.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I Parties convexes et utilisations

I.1 Notion de partie convexe

Définition 1 : Segment [Hassan, p.313] :
On considère $x, y \in E$.
On appelle **segment de** E **d'extrémités les points** x **et** y l'ensemble défini par $[x; y] = \{tx + (1-t)y,\ t \in [0; 1]\}$.

Définition 2 : Partie convexe [Hassan, p.314] :
On dit qu'une partie A de E est une **partie convexe** lorsque pour tous $x, y \in E$ le segment $[x; y]$ appartient à A.

Définition 3 : Parte étoilée [Hassan, p.314] :
On dit qu'une partie A de E est une **partie étoilée** lorsqu'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$ le segment $[a; x]$ appartient à A.

Remarque 4 : [Hassan, p.314]
Dans un espace vectoriel normé, on a :

$$A \text{ convexe} \implies A \text{ étoilé} \implies A \text{ connexe par arcs}$$

Cependant, la réciproque est fausse en général.

Remarque 5 :
Une illustration de la convexité est donnée en annexe.

Exemple 6 : [Hassan, p.314]
Les sous-ensembles convexes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Proposition 7 : [Hassan, p.314]
Soient A et B des sous-ensembles convexes de E.
* Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λA et $A + B$ sont des ensembles convexes.
* Une intersection de sous-ensembles convexes de E est convexe.

Proposition 8 : [Hassan, p.315]
Si E est muni d'une structure d'espace vectoriel normé, alors pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, les boules $\mathcal{B}(a, r)$ sont convexes.

Proposition 9 : [Hassan, p.316]
Soit A un sous-ensemble convexe de E.
Si E est muni d'une structure d'espace vectoriel normé, alors :
$*$ $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont des sous-ensembles convexes de E.
$*$ Si $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$.

Définition 10 : Enveloppe convexe [Combes, p.143] :
On considère A un sous-ensemble de E.
On appelle **enveloppe convexe de** A l'intersection de tous les convexes de E contenant A et on la note $\mathrm{Conv}(A)$.

Proposition 11 : [Combes, p.143]
Soit A un sous-ensemble de E.
$\mathrm{Conv}(A)$ est le plus petit convexe de E contenant A.

Exemple 12 : [Combes, p.143]
$*$ Si $Y = \{x\}$, alors $\mathrm{Conv}(Y) = Y$.
$*$ Y est une partie convexe si, et seulement si, $Y = \mathrm{Conv}(Y)$.
$*$ Si $Y = \{x; y\}$, alors $\mathrm{Conv}(Y)$ est le segment $[x; y]$.
$*$ Si $Y = \{x, y, z\}$, alors $\mathrm{Conv}(Y)$ est le triangle plein dont les sommets sont x, y et z.

I.2 Convexité dans les Hilbert

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $(H, < \cdot; \cdot >_H)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 13 : [Hassan, p.489]
Soit C un convexe fermé non vide de $(H, < \cdot; \cdot >_H)$ un espace hilbertien.
Pour tout $x \in H$, il existe un unique $c \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - c\|_H$ avec pour tout $z \in C$, $\mathrm{Re}(< z - c; x - c >_H) \leq 0$.
De plus, en notant P_C la projection sur C, on a P_C 1-lipschitzienne (donc continue).

Théorème 14 : [Hassan, p.490]
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $(H, < \cdot; \cdot >_H)$.
L'application $P_F : H \longrightarrow H$ est linéaire telle que :
$*$ P_F est une projection telle que $P_F \circ P_F = P_F$.
$*$ $\mathrm{Ker}(P_F) = F^\perp$ et $\mathrm{Im}(P_F) = F$.
$*$ Pour $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique élément y de F tel que $x - y \in F^\perp$ (P_F est donc la projection orthogonale sur F).

Corollaire 15 : [Hassan, p.491]
Soit F un sous-espace vectoriel de H.
$*$ On a $\overline{F}^\perp = F^\perp$, $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ et $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.
$*$ F est dense dans H si, et seulement si, $F^\perp = \{0_H\}$.

Remarque 16 :
L'hypothèse de fermeture dans le corollaire précédent n'est pas superflue. En effet, pour $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang, on a $F^\perp = \{0_H\}$ mais $E \neq F$.

I.3 Convexité en analyse complexe

Dans toute cette sous-partie, on considère U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

Théorème 17 : Théorème de Goursat [Tauvel, p.74] :
Soient $\omega \in U$ et f une fonction continue sur U et holomorphe sur $U \backslash \{\omega\}$.
Pour tout triangle $T \subseteq U$, on a $\int_{\partial T} f(z) \mathrm{d}z = 0$.

Théorème 18 : Théorème de Cauchy pour un convexe [Tauvel, p.76] :
Soient $\omega \in U$ et f une fonction continue sur U et holomorphe sur $U \backslash \{\omega\}$.
f possède une primitive dans U et, pour tout chemin fermé γ dans U on a $\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 0$.

Théorème 19 : Formule de Cauchy pour un convexe [Tauvel, p.77] :
Soient γ un chemin fermé dans un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$, $z \in U \backslash \mathrm{Im}(\gamma)$.
Pour tout $f \in \mathcal{H}(U)$, on a $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$.

Théorème 20 : [Tauvel, p.77]
Soient $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.
$*$ On a f analytique sur U et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C} \backslash U)$.
$*$ De plus, si U est convexe et si γ est un chemin fermé dans U tel que $a \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $f^{(n)}(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$.

II Fonctions convexes

II.1 Définitions générales

Dans toute cette sous-partie, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, C une partie convexe de E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Définition 21 : Fonction (strictement) convexe [Deschamps, p.158] :
f est dite **(strictement) convexe** sur C lorsque pour tout $(x, y) \in C$ et tout $\lambda \in [0; 1]$ on a $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (<) \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Définition 22 : Fonction (strictement) concave [Deschamps, p.158] :
f est dite **(strictement) concave** sur C lorsque la fonction $-f$ est (strictement) convexe sur C.

Exemple 23 : [Deschamps, p.159]
* Toute fonction affine est convexe sur $\mathbb{R}$.
* La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

Définition 24 : Épigraphe [Deschamps, p.160] :
On appelle **épigraphe de** f l'ensemble $\left\{(x, y) \in E^2 \text{ tq } x \in C \text{ et } f(x) \leq y\right\}$ et on le note $\mathcal{E}(f)$.

II.2 Fonction convexe sur $\mathbb{R}$

Dans toute cette partie, on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on considère une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 25 : [Deschamps, p.159]
La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous points A_1 et A_2 du graphe de f d'abscisses respectives x_1 et x_2, le graphe de $f|_{[x_1;x_2]}$ est en dessous de la corde $[A_1; A_2]$ (cf. annexe 1).

Proposition 26 : [Deschamps, p.159]
Si f est convexe sur $I = [a; b]$ et $f(a) = f(b)$, alors pour tout $x \in [a; b]$ on a $f(x) \leq f(a)$.

Exemple 27 : [Deschamps, p.159]
* La fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
* La fonction $x \longmapsto x^3$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 28 :
Soient g et h deux fonctions convexes.
* Si g et h sont définies sur I, alors $g + h$ est une fonction convexe mais gh ne l'est pas nécessairement.
* Si g est définie sur J et croissante et h est définie de I dans J, alors $g \circ h$ est convexe.

Proposition 29 : [Deschamps, p.160]
f est convexe sur I si, et seulement si, son épigraphe l'est aussi.

Proposition 30 : Inégalité des pentes [Deschamps, p.161] :
Si f est convexe sur I, alors on a :

$$\forall (x, y, z) \in I^3, \ (x < y < z) \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Remarque 31 : [Deschamps, p.161]
* Ces inégalités s'expriment en terme de pentes de droites (cf. annexe 2).
* La propriété précédente est en fait une équivalence.

Proposition 32 : [Deschamps, p.162]
f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction :

$$\varphi_a : \begin{array}{|ccc} I \backslash \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

est croissante.

Exemple 33 : [Deschamps, p.162]
On considère p et q deux réels.
La fonction $g : x \longmapsto f(x) - px - q$ est convexe si, et seulement si, f est convexe.
En effet, les fonctions φ_a correspondant à f et à g diffèrent de la constante p.

Proposition 34 : [Deschamps, p.163]
Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est convexe si, et seulement si, f' est croissante sur I.

Exemple 35 : [Deschamps, p.163]
* On retrouve le fait que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
* La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Une fonction convexe peut ne pas être dérivable (comme la fonction valeur absolue par exemple), néanmoins on a le résultat suivant :

Proposition 36 : [Deschamps, p.163]
Soit $a \in \mathring{I}$.
Si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche au point a et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.
En particulier, f est continue en tout point intérieur de I.

Corollaire 37 : [Deschamps, p.164]
Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe si, et seulement si, f'' est positive.

Théorème 38 : [Rombaldi (1), p.347]
Si f est convexe sur I et dérivable en $\alpha \in \mathring{I}$ avec $f'(\alpha) = 0$, alors elle admet un minimum global en α.

Théorème 39 : [Rombaldi (1), p.347]
Si f est convexe sur I et admet un minimum local en $\alpha \in I$, alors ce minimum est global en α.

II.3 Fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette sous-partie, on considère C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 40 :
f est convexe sur C si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in C^2$ on a $\varphi_{x,y}$ définie sur $[0; 1]$ par $\varphi_{x,y}(t) = f(tx + (1 - t)y)$ est convexe.

Théorème 41 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Si f est différentiable sur $\mathcal{U}$, alors f est convexe si, et seulement si, pour tout $(x, a) \in \mathcal{U}^2$, $f(x) \geq f(a) + df_a(x - a)$.

Théorème 42 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Si f est deux fois différentiable sur $\mathcal{U}$, alors f est convexe si, et seulement si, pour tout $(a, h) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, $d^2f_a(h, h) \geq 0$.
Autrement dit, f est convexe si, et seulement si, la hessienne de f est positive.

Exemple 43 :
La fonction $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

III Application des fonctions convexes à différents domaines

III.1 Inégalités de convexité en analyse et probabilités

Proposition 44 : Inégalité de Jensen [Deschamps, p.160] :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(\lambda_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.
On a l'inégalité :

$$\forall (x_1, ..., x_p) \in I^p,\ f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Exemple 45 : [Deschamps, p.161]
Par convexité de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Remarque 46 :
L'inégalité de Jensen peut également se traduire dans un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sous la forme :
Pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et toute fonction φ convexe on a $\mathbb{E}(\varphi(X)) \leq \varphi(\mathbb{E}(X))$.

Proposition 47 : Inégalité de Young [Deschamps, p.164]
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
On a alors l'inégalité : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Remarque 48 :
L'inégalité de Young est utilisée pour montrer l'inégalité de Hölder (et donc l'inégalité de Minkowski).

Proposition 49 : Inégalité arithmético-géométrique [Deschamps, p.164] :
Soient $x_1, ..., x_n$ des réels positifs et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
On a alors l'inégalité : $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
En particulier, on obtient l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Proposition 50 : [Deschamps, p.164]
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a;b]$.
Si $f(a) = f(b) = 0$ et que f'' est bornée par une constante M sur $[a;b]$, alors pour tout $x \in [a;b]$ on a $|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

Proposition 51 : [Deschamps, p.164 + 165]
* Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I, alors on a :

$$\forall (x,a) \in I^2, \; f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$$

* Si f est une fonction concave et dérivable sur un intervalle I, alors on a :

$$\forall (x,a) \in I^2, \; f(x) \leq f(a) + (x-a)f'(a)$$

Remarque 52 : [Deschamps, p.165]
Le résultat précédent peut s'interpréter en disant que le graphe d'une fonction convexe (respectivement concave) dérivable et situé au-dessus (repsectivement au dessous) de chacune de ses tangentes.

Proposition 53 : [Deschamps, p.165]
* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$. * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x-1$.
* Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

III.2 Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Développement 1 : [cf. GOURDON (1)]

Proposition 54 : [Gourdon (1), p.315]
* Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
* La fonction Γ est log-convexe sur $]0;+\infty[$.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
* On a $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Lemme 55 : Formule d'Euler-Gauss [Gourdon (1), p.315] :
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Théorème 56 : Théorème de Bohr-Mollerup [Rombaldi (2), p.366] :
Si une fonction f vérifie :
* Le domaine de définition de f contient $\mathbb{R}_+^*$ et f est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f(x+1) = xf(x)$.
* $f(1) = 1$ alors f coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction Γ.

III.3 Processus de Galton-Watson

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi notée μ admettant une espérance notée m, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose que $p_0 \in]0;1[$.

Définition 57 : Série génératrice [Deschamps, p.949] :
On appelle **série génératrice de** X la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de X. On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \; Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction la probabilité d'extinction à l'instant n, $P_{\text{ext}} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction de la population et G_n la fonction génératrice de Z_n.

Développement 2 : [cf. GOURDON (2)]

Lemme 58 : [Gourdon (2), p.345]
* G est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0;1]$.
* G est strictement croissante sur $[0;1]$.
* G est strictement convexe sur $]0;1]$ si, et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

Proposition 59 : [Gourdon (2), p.376]
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ \dots \circ G$ (n fois), avec G la série génératrice de X.
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
* De plus, on a : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.

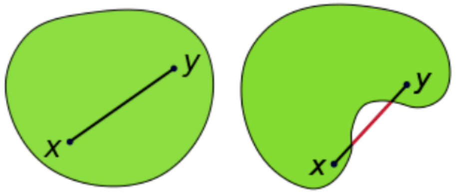
Développement 3 : [cf. GOURDON (2)]

Théorème 60 : [Gourdon (2), p.376]

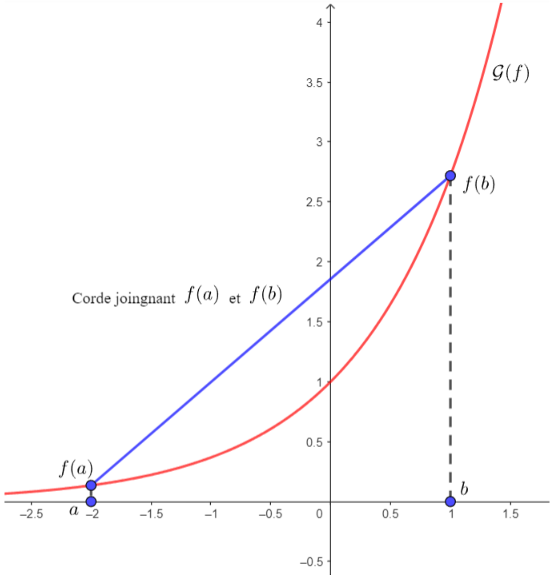
* P_{ext} est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur $]0;1]$.
* Si $m \leq 1$ (cas sous-critique et critique), alors $P_{ext} = 1$.
* Si $m > 1$ (cas super-critique), alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

IV Annexe

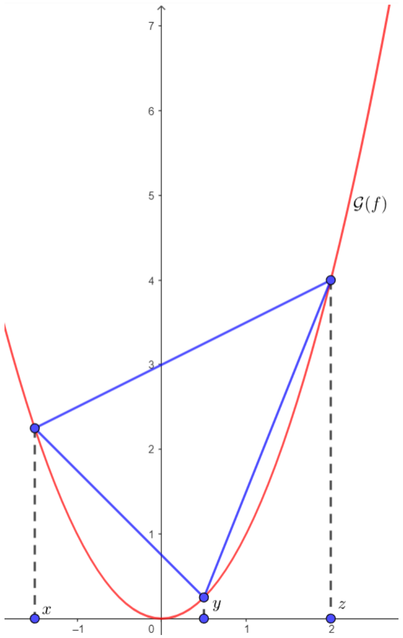
IV.1 Illustration de la convexité



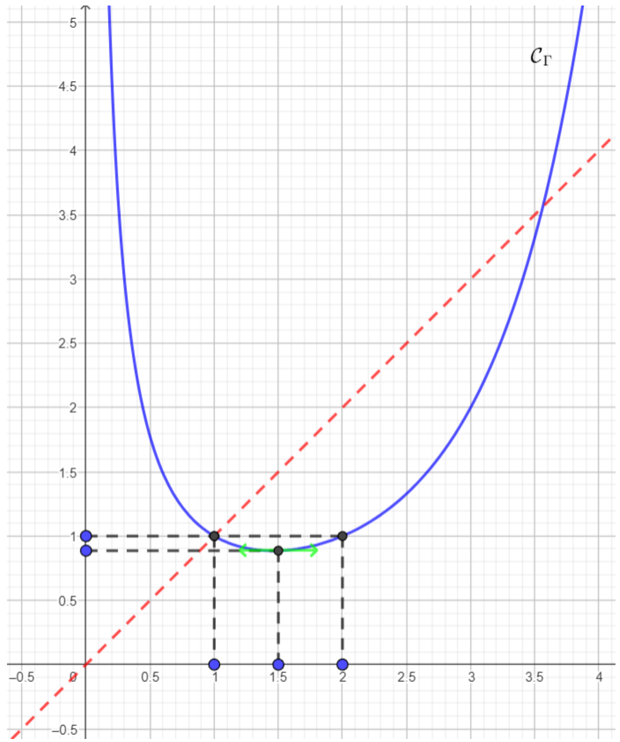
IV.2 Représentation graphique d'une fonction convexe



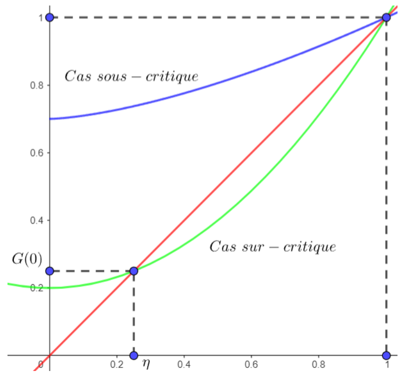
IV.3 Illustration de l'inégalité des pentes



IV.4 Allure de la fonction Γ



IV.5 Représentation graphique de G et de ses points fixes



Remarques sur le plan

— On peut également s'intéresser à des théorèmes de points fixes, d'optimisation et de séparation des convexes ou encore des espaces L^p.

Liste des développements possibles

— Théorème de projection sur un convexe fermé.

— Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$.

— Processus de Galton-Watson.

Bibliographie

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— François Combes, *Algèbre et géométrie*.

— Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et Probabilités*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.