Leçon 250 - Transformation de Fourier. Applications.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1, classe de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, ou L^2. Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat. Cette leçon exige donc une préparation soigneuse.
La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.
Proposer comme développement le théorème d'échantillonage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 250 intitulée : "Transformation de Fourier. Applications.". Il s'agit de généraliser la décomposition d'un signal en série de Fourier dans le cas d'un signal quelconque, la décomposition se faisant selon un spectre continu. Heureusement, non seulement la transformation est algébriquement appréciable, mais elle conserve l'injectivité que l'on connaît pour les séries de Fourier dans le cas de signaux périodiques : on peut donc obtenir de nombreuses informations sur un fonction en étudiant sa transformée de Fourier, qui est plus régulière et plus manipulable. La transformée de Fourier a aussi pour avantage de simplifier des calculs via sa propriété de permutations des propriétés de convolution et de produit.
Dans une première partie, on s'intéresse au produit de convolution en commençant dans un premier temps par les généralités. On donne ainsi la définition du produit de convolution ainsi que des propriétés fondamentales. On donne ensuite une application en probabilité et un résultat sur la dérivabilité. Un inconvénient de la convolution est que $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas une algèbre avec un élément neutre... Il nous faut donc remédier à ce problème en introduisant une approximation de l'unité. On donne alors la définition d'une approximation de l'unité ainsi que quelques exemples avant de passer au théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi qu'aux suites régularisantes qui permettent de construire des fonctions plateaux et d'avoir des résultats de densité.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse à la transformée de Fourier avec tout d'abord le cadre $L^1(\mathbb{R})$. On rappelle la définition de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que quelques propriétés de base. On donne ensuite deux exemples de transformée de Fourier avant de donner d'autres propriétés opératoires sur la transformée de Fourier. On donne ensuite la proposition 25 qui est un résultat important pour résoudre des équations et on démontre la formule de dualité, l'injectivité de la transformée de Fourier et la formule d'inversion. Dans un deuxième point on traite de la transformée de Fourier dans le cadre plus large de $L^2(\mathbb{R})$. En effet, comme $L^2(\mathbb{R}) \subsetneq L^1(\mathbb{R})$, nous ne pouvons pas, en général, utiliser les formules intégrales pour définir les transformées de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$. Pourtant la nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est apparue très tôt. Ainsi, Plancherel a étendu en 1910 la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, espace présentant l'avantage par rapport à $L^1(\mathbb{R})$ d'être un espace de Hilbert, avec tous les avantages géométriques que cela représente. Cela aboutit, notamment grâce au théorème de Plancherel-Parseval, à une théorie plus complète et plus symétrique puisque dans $L^2(\mathbb{R})$ les fonctions f et $\widehat{f}$ jouent exactement le même rôle. On commence donc par étendre la définition de la transformée de Fourier avant d'énoncer d'autres résultats tels que la formule de dualité et d'inversion avec l'opérateur de Fourier-Plancherel. On termine cette partie avec un dernier point sur la classe de Schwartz qui comble les insuffisances de $L^1(\mathbb{R})$ et pousse plus loin les résultats que ceux sur $L^2(\mathbb{R})$. On donne d'abord la définition d'une fonction à décroissance rapide et de l'espace de Schwartz avant de continuer avec des résultats de stabilité ainsi que le théorème 50 et proposition 52 qui sont des résultats très utiles en pratique.
Dans un dernier point, on donne des applications à la transformée de Fourier. Tout

d'abord on parle de polynômes orthogonaux : on commence par énoncer la définition d'une fonction poids avant de s'intéresser à l'espace $L^2(I,\rho)$ qui est un espace de Hilbert et on conclut en donnant des exemples de fonctions poids ainsi que des polynômes unitaires orthogonaux et une condition suffisante pour que ces polynômes forment une base hilbertienne de l'espace $L^2(I,\rho)$. On continue avec une deuxième sous-partie consacrée aux probabilités où l'on rappelle la définition de la convergence en loi et de la fonction caractéristique qui peut être vue comme une transformée de Fourier avant de finir par quelques exemples ainsi que le théorème de Lévy qui ramène l'étude d'une convergence en loi à la convergence simple d'une suite de fonctions et le théorème central-limite. Enfin, on termine cette leçon avec un dernier point culturel consacrée à la mécanique quantique où l'on donne une application physique de la transformée de Fourier avec l'inégalité d'Heisenberg ainsi qu'une interprétation physique.

Plan général

Cours détaillé

I Produit de convolution

I.1 Généralités

Définition 1 : Produit de convolution [El Amrani, p.75] :
On dit que deux fonctions $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sont **convolables** lorsque, pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors le **produit de convolution de f et de g** par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 2 : [El Amrani, p.77]
Soient f et g deux fonctions convolables.
On a alors l'inclusion : $\operatorname{supp}(f*g)\subseteq\overline{\operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g)}$.

Théorème 3 : [El Amrani, p.78 + 80 + 81]
Soit $p\in[1;+\infty[$ et q sont exposant conjugué.
$*$ Pour tous $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, $f*g\in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\|g\|_1$.
$*$ Pour tous $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $g\in L^p(\mathbb{R})$, $f*g\in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p$.
$*$ Pour tous $f\in L^p(\mathbb{R})$ et $g\in L^q(\mathbb{R})$, $f*g\in\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\|f*g\|_\infty\leq\|f\|_p\|g\|_q$.
De plus, $f*g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et si $p\neq 1$, alors $f*g\in\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Remarque 4 : [El Amrani, p.78 + 85]
La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_p,+,\cdot,*)$ est une algèbre de Banach commutative (elle est cependant sans unité !).

Remarque 5 : [Chabanol, p.29]
La somme de deux variables aléatoires indépendantes définies sur $\mathbb{R}$ et de densités respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue a pour densité $f*g$.

Exemple 6 :
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{N}_1(0,\sigma)$ et $\mathcal{N}_1(0,\sigma')$, alors la variable aléatoire réelle $X+Y$ suit la loi $\mathcal{N}_1(0,\sigma+\sigma')$.

Théorème 7 : [El Amrani, p.90]
Soient $k\in\mathbb{N}$, $f\in\mathcal{C}^k_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g\in L^1(\mathbb{R})$.
On a $f*g\in\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $\ell\in[\![0;k]\!]$, $\frac{\partial^\ell(f*g)}{\partial x^\ell}(x)=\left(\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}*g\right)(x)$.

I.2 Approximation de l'unité

Définition 8 : Approximation de l'unité [El Amrani, p.86] :
On appelle **approximation de l'unité** dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$*$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 1$. $(*)$ $\quad *$ $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{j\to+\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 9 : [El Amrani, p.86]
Une fonction mesurable φ_j vérifiant $(*)$ est appelée une **densité de probabilité**.

Exemple 10 : [El Amrani, p.86]
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{2}e^{-j|x|}$ (approximation de Laplace).
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{\pi}\frac{1}{1+j^2x^2}$ (approximation de Cauchy).
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{j^2x^2}{2}}$ (approximation de Gauss).

Théorème 11 : Théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.87] :
Soient $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, $p \in [1;+\infty[$ et f une application de la variable réelle.
$*$ Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
$*$ Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $(f * \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Définition 12 : Suite régularisante [El Amrani, p.94] :
On appelle **suite régularisante de** $\mathbb{R}$ toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$ de la définition 19 et telle qu'il existe une autre suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0 telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{B}_o(0, \varepsilon_j)$.

Théorème 13 : [El Amrani, p.95]
Soient $p \in [1;+\infty[$ et $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante.
$*$ Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ f * \varphi_j \in L^p(\mathbb{R}) \text{ et } \lim_{j\to+\infty} \|f * \varphi_j - f\|_p = 0$$

$*$ Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on a $f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la suite $(f * \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Corollaire 14 : [El Amrani, p.96]
Soit $p \in [1;+\infty[$.
L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

II Transformée de Fourier

II.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 15 : Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.109 + 110] :
On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On appelle **transformée de Fourier de** f l'application :

$$\widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Puis **transformation de Fourier** l'application :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lemme 16 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.109] :
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 17 : [El Amrani, p.110]
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.

Corollaire 18 : [El Amrani, p.111]
La transformation de Fourier est une application qui est linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemple 19 : [El Amrani, p.111]
On considère l'application $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
On a $p \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout réel $A > 0$ fixé, on a :

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-A(1-i\xi)}}{1 - i\xi} + \frac{1 - e^{-A(1+i\xi)}}{1 + i\xi}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient : $\mathcal{F}(p)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Exemple 20 : [El Amrani, p.111]
On considère $[a;b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_{[a;b]}$ (avec $a < b$).
La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{e^{\frac{i(b-a)\xi}{2}} - e^{-\frac{i(b-a)\xi}{2}}}{i\xi}e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}}$$

Et comme $\widehat{f}(0) = b - a$, on a finalement :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Proposition 21 : [El Amrani, p.112]
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}(f))_\sigma \,,\; \mathcal{F}\left(\overline{f}\right) = \left(\overline{\mathcal{F}(f)}\right)_\sigma \text{ et } \overline{\mathcal{F}}\left(\overline{f}\right) = \overline{\mathcal{F}(f)}$$

Corollaire 22 : [El Amrani, p.112]
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a :

$$f \text{ paire (resp. impaire)} \implies \widehat{f} \text{ paire (resp. impaire)}$$

$$f \text{ réelle paire (resp. réelle impaire)} \implies \widehat{f} \text{ réelle paire (resp. réelle impaire)}$$

Proposition 23 : [El Amrani, p.113]
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
* Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.
* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-iax}\mathcal{F}(f)(\xi)$ et $\mathcal{F}\left(e^{iax}f(x)\right)(\xi) = \tau_a\left(\mathcal{F}(f)\right)(\xi)$.

Proposition 24 : [El Amrani, p.113]
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et radiale.
La transformée de Fourier de f est une fonction radiale.

Proposition 25 : [El Amrani, p.114]
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Remarque 26 : [El Amrani, p.114]
On peut montrer grâce à ce résultat qu'il n'y a pas d'élément neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Développement 1 : [cf. EL AMRANI]

Proposition 27 : [El Amrani, p.112]
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Théorème 28 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$.

Théorème 29 : [El Amrani, p.115]
La transformation de Fourier est une application injective.

Exemple 30 : [El Amrani, p.116]
L'équation $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'admet pas de solutions dans $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 31 :
La transformée de Fourier n'est pas surjective mais son image est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$.

Théorème 32 : Formule d'inversion [El Amrani, p.116] :
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$

II.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 33 : Formule de Plancherel-Parseval [El Amrani, p.123] :
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\left\|\widehat{f}\right\|_2^2 = 2\pi\,\|f\|_2^2$.

Théorème 34 : Théorème de Fourier-Plancherel [El Amrani, p.124]
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.
* Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.
* Pour une telle suite, la suite $(\mathcal{F}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\widetilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 35 : Transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.125] :
On considère $f \in L^2(\mathbb{R})$.
La limite $\widetilde{f}$ définie dans le théorème ci-dessus est appelée **transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$**.

Corollaire 36 : [El Amrani, p.125]
$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

Proposition 37 : [El Amrani, p.125]
La définition ci-dessus étend la définition de la transformée de Fourier classique dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (autrement dit, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f} = \widetilde{f}$).

Théorème 38 : Formule de dualité [El Amrani, p.127]
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
On a $\widetilde{f}g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f\widetilde{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et on a : $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(u)g(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} f(v)\widetilde{g}(v)\mathrm{d}v$.

Théorème 39 : [El Amrani, p.127]
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
On a $f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$.

Proposition 40 : [El Amrani, p.128]
Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.
On a $\widehat{f}\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ et $f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)$.

Définition 41 : Opérateur de Fourier-Plancherel [El Amrani, p.129] :
On appelle **opérateur de Fourier-Plancherel**, l'opérateur :

$$\mathcal{P} : \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array} \right.$$

Lemme 42 : [El Amrani, p.129]
L'espace vectoriel $V = \left\{f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ tq } \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\right\}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1; +\infty[$.

Théorème 43 : Formule d'inversion [El Amrani, p.130]
L'opérateur de Fourier-Plancherel est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et d'inverse $\mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$.

II.3 Cas de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 44 : Fonction à décroissance rapide [El Amrani, p.133] :
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que f est une **fonction à décroissance rapide** lorsque pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha f(x)| = 0$.

Définition 45 : Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.134] :
On appelle **espace de Schwartz** l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

Exemple 46 : [El Amrani, p.134]
Tout élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarque 47 : [El Amrani, p.133]
Décroissance rapide n'a pas de lien avec la monotonie.
En effet, la fonction $x \longmapsto \sin(x)e^{-|x|}$ est à décroissance rapide.

Proposition 48 : [El Amrani, p.134]
L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par produit, par dérivation ainsi que par multiplication par un polynôme.

Théorème 49 : [El Amrani, p.135]
L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier.

Théorème 50 : [El Amrani, p.135]
La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et l'application inverse est donnée par $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}$.

Remarque 51 : [El Amrani, p.136]
On considère $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1; 1]$.
En considérant les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \text{ et } f_n = \varphi_n f$$

On obtient que chaque f_n appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et donc que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 52 : [El Amrani, p.136]
L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

III Divers applications

III.1 Polynômes orthogonaux

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a; b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 53 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur** I une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 54 : L'espace $L^2(I, \rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I, \rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 55 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I, \rho)$.

Théorème 56 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I, \rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ρ).

Exemple 57 : [El Amrani, p.41]
* Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
* Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
* Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
* Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Théorème 58 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Remarque 59 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0;+\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

III.2 Probabilités

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 60 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 61 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array} \right.$$

Remarque 62 : [Chabanol, p.43]
* Ceci permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X (elle existe toujours car $\left|e^{itX}\right| = 1$ et $\mathbb{P}_X$ est une mesure bornée). On en déduit de plus que Φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.
* Par injectivité de la transformée de Fourier, on obtient donc que la fonction caractéristique caractérise la loi d'une variable aléatoire.

Exemple 63 :
* Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1 - p + pe^{it}$.
* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
* Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Développement 2 : [cf. QUEFFELEC]

Lemme 64 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Théorème 65 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
* La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Théorème 66 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

III.3 Mécanique quantique [ADMIS]

Proposition 67 : Inégalité d'Heisenberg [El Amrani, p.145] :
Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \geq \frac{\|f\|_2^4}{4}$$

Remarque 68 : [El Amrani, p.145]
Ce résultat montre que si une fonction est très "concentrée", alors la transformée de Fourier est très "étalée".

La transformation de Fourier s'est avérée très tôt être un outil essentiel pour décrire les phénomènes naturels dans le formalisme de la mécanique quantique. Dans cette optique en effet, le déplacement d'une particule (par exemple un électron) le long de l'axe des abscisses est décrit par une fonction d'onde $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_2 = 1$. On obtient alors en posant $\Delta_a f$ et $\Delta_\alpha \widehat{f}$ les mesures de concentration des distributions de probabilités $|f|^2$ et $\left|\widehat{f}\right|^2$ autour des points a et α que $\Delta_a f \Delta_\alpha \widehat{f} \geq \frac{\hbar}{4}$. Ainsi, on ne peut pas savoir avec une précision infinie la vitesse et la position de la particule simultanément.

Remarques sur la leçon

- Il est bon de connaître la continuité des petites translations et la régularité de la mesure de Lebesgue ainsi que la preuve de la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

- Maîtriser la classe de Schwartz avec la notion de topologie qui en découle et savoir étudier des convergence.

- On peut également parler de résolution d'équations aux dérivées partielles.

Liste des développements possibles

- Injectivité de la transformée de Fourier.

- Polynômes orthogonaux.

- Théorème de Lévy + TCL.

Bibliographie

- Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

- Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.

- Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.