NOM : KUGLER **Prénom :** Benoit **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 190. Méthodes combinatoires

Autre sujet :

I – Bijections

__Théorème-définition 1 :__ Si $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$ sont en bijection, alors $n = m$.
On dit qu'un ensemble E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$. Dans ce cas n est unique, on l'appelle cardinal de E et on le note $|E|$.

__Proposition 2 :__ Si E est fini, si $A \subset E$, alors A est fini et $|A| \leq |E|$. De plus $|A| = |E| \Leftrightarrow A = E$.

__Propriétés 3 :__ Soit $f : E \to F$.
(i) Si E est fini, $f(E)$ est fini et $|f(E)| \leq |E|$
(ii) Si f est injective, si F est fini, alors E est fini et $|E| \leq |F|$
(iii) Si f est surjective, si E est fini, alors F est fini et $|F| \leq |E|$
(iv) Si E et F sont finis, si $|E| = |F|$, alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective

__App 4 :__ (de (iii), principe des tiroirs)
Si $a \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$, tels que $0 < q \leq N$ et $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq}$

__App 5 :__ (de (iv))
Un anneau intègre et fini est un corps.

__Proposition 6 :__ (Premiers cardinaux).
Si E, F sont finis, on a
$|E \times F| = |E| \cdot |F|$ $\quad |E^F| = |E|^{|F|}$
$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$
Si $A, B \subset E$, $\quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

__App 7 :__ (Ensemble de matrices)
$\left|\left\{ M \in GL_n(\mathbb{F}_p) \;/\; M = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}\right| = \left|\mathbb{F}_p^{n-1} \times \mathbb{F}_p^{n-2} \times \dots \times \mathbb{F}_p\right|$
$= p^{\frac{n(n-1)}{2}}$

__Définition 8 :__ (Coefficients binomiaux)
On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n.

__Prop 9 :__ (Formule de Pascal)
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

__Corollaire 10 :__ $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

__Prop 11 :__ Si S_n est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, alors $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$,
$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$
On en déduit que 0 est récurrent.

II - Principe de la somme des parties

1) Formule basique

Prop 12 : Si $E = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$, alors $|E| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$.

App 13 : $|\mathfrak{S}_n| = n!$; $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Prop 14 : Le nombre d'injections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$ est 0 si $n > m$, $\frac{m!}{(m-n)!}$ si $1 \leq n \leq m$

App 15 : La probabilité que 2 personnes parmi n aient leur anniversaire le même jour est de $1 - \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$
(Annexe 1)

Prop 16 : $|GL_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1}) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=0}^{n-1}(p^{n-i}-1)$

Corollaire 17 : L'ensemble défini en 7. est un p-sg de Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Prop 18 : (Formule des classes) Si G est un groupe fini, agissant sur X, fini alors $|X| = \sum_{x \text{ rep.}} |Orb(x)| = \sum_{x \text{ rep.}} \frac{|G|}{|Stab(x)|}$

App 19 : (Th. de Cauchy) Si p premier divise $|G|$ (G fini), alors G admet un élément d'ordre p.

Prop 20 : (Partition d'un entier) On pose $u_n^p = \left|\left\{(k_1,\dots,k_p) \in [\![1,n]\!]^p \,/\, k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p \text{ et } \sum_{i=1}^{p} k_i = n\right\}\right|$
On a, si $1 \leq p \leq n$, $u_n^p = u_{n-1}^{p-1} + u_{n-p}^{p}$
et si $p > n$ $u_n^p = 0$

2) Raffinements : comptage double, formule du crible

Prop 21 : (Formule de Burnside) Si $G \curvearrowright X$, en notant Orb l'ensemble des orbites, on a
$$|Orb| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

App 22 : Le nombre moyen de points fixes d'une permutation est 1.

App 23 : Le nombre d'assiettes à n parts coloriées en c couleurs, réellement différentes, est de
$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) c^d$$
(Annexe 2)

Prop 24 : (Formule du crible) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$

App 25 : Le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$ vaut 0 si $n < m$, $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n$ si $n \geq m$

III - Outils de calculs, inversions

1) Inversion de Möbius

Def 26 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^r & \text{si } n = \prod_{i=1}^{r} p_i \end{cases}$
(p_i diviseurs premiers de n)

Prop 27 : • $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$,

• $\left(\forall n \geq 1 \;\; a_n = \sum_{d|n} b_d\right) \Rightarrow \left(\forall n \geq 1 \;\; b_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d\right)$

App 28 : Le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n de $\mathbb{F}_q[X]$ vaut $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{q^n}{n}$

DVP 1

Prop 29: La probabilité que 2 entiers de $[\![1,n]\!]$ soit premiers entre eux est de $\frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n} \mu(r)\, E\left(\frac{n}{r}\right)^2$

2) Séries génératrices

Prop 30: (Nb de Catalan) On pose $c_0 = 1$ et, si $n \geq 1$,
$c_n = \left| \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \{-1,1\}^{2n} \;/\; \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,2n]\!] \; \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \leq 0 \right\} \right|$

(Annexe 3) Alors $\forall n \geq 1 \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k}$,

puis si $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, $\forall z \in D(0,\frac{1}{4}) \quad z f(z)^2 - f(z) + 1 = 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Prop 31: (Nb de Bell) Soit B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \exp(e^z) - 1$, d'où $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$

Prop 32: (Équation diophantienne) Soit $S_n = \left|\left\{(k_1,\dots,k_p) \in [\![0,n]\!]^p \;/\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i k_i = n\right\}\right|$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des entiers non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \alpha_i} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$

IV - Lien avec une structure algébrique

Prop 33: Si $f : G \to F$ est un morphisme de groupes, alors $|G| = |\mathrm{Ker} f|\,|\mathrm{Im} f|$

App 34: Le nombre de carrés de $\mathbb{F}_p^*$, $p > 2$, est $\frac{p-1}{2}$.

Exercice 35: Si $p > 2$, x carré dans $\mathbb{F}_p^* \iff x^{\frac{p-1}{2}} = 1$:

Prop 36: (Indicatrice d'Euler) Si $n \wedge m = 1$, p premier,
$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$, $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$
$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ $\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Prop 37: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

App 38: Tout sous-groupe fini de K^* (K corps) est cyclique.

Prop 39: (Th de Sylow) Soit G groupe de cardinal $p^\alpha m$ où p premier, $p \wedge m$. Alors
- il existe un p-Sylow de G, on note n_p leur nombre.
- les p-Sylow de G sont conjugués
- $n_p \equiv 1 [p]$, $n_p | m$

App 40: Un groupe de cardinal 63 n'est pas simple.

Déf 41: Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.
P_σ est appelé matrice de permutation.

Prop 42: $\begin{vmatrix} \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL_n(K) \\ \sigma \longmapsto P_\sigma \end{vmatrix}$ est un morphisme de groupe

Th 43: (Brauer) Soit $\sigma, \gamma \in \mathfrak{S}_n$. Alors
σ, γ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si
P_σ, P_γ sont conjuguées dans $GL_n(K)$

DVP 2

Annexe :

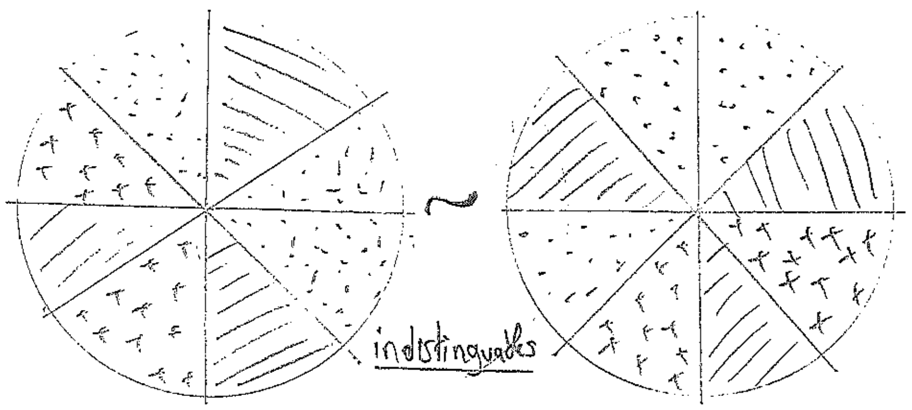
1- Paradoxe des anniversaires

Valeurs numériques : $n=23$, $p_n = 95\%$

$n=32$, $p_n = 0{,}75$

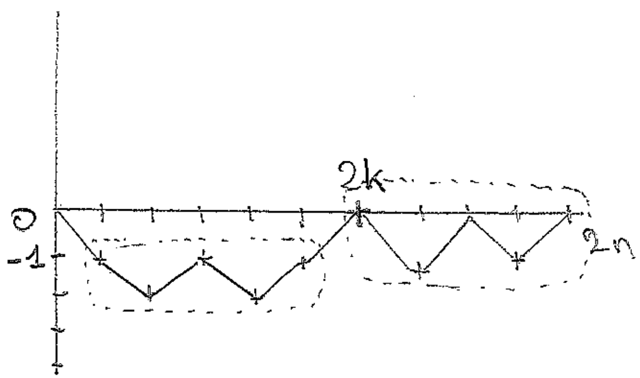
$n=55$, $p_n = 0{,}99$

2- Assiettes colorées :



Exemple pour $n=8$, $c=3$.

3- Nombres de Catalan (version marche aléatoire)



Interprétation de la relation de récurrence $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$:

2k est le premier retour en 0.