Leçon 245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Les fondements de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe contenues dans le programme fournissent un ample matériel pour nourrir cette leçon : représentation intégrale ou sous forme de série entière, principe des zéros isolés et ses conséquences, principe du maximum. L'un des deux développements proposés peut être consacré à la preuve d'un de ces résultats fondamentaux.
Les candidats doivent être capables de donner la définition d'une fonction méromorphe, et d'en présenter les applications du programme : développements en série de Laurent et formule des résidus, illustrés par des exemples significatifs.
Les candidates et candidats solides peuvent aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, l'étude des zéros des fonctions holomorphes, la représentation sous forme de produit infini, le problème de la représentation conforme, le théorème de Paley-Wiener, les espaces de Hardy sur le disque unité, le problème du prolongement analytique, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, les algèbres de Banach, etc.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 245 intitulée : "Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.". On étend ici la notion de dérivée pour des fonctions de variables complexes. Cette nouvelle notion va donner une structure extrêmement forte et restrictive qui va découler sur toute une théorie extrêmement vaste et puissante.
Dans une première partie on parle de fonctions holomorphes et de fonctions analytiques en commençant par le cas des fonctions analytiques. On introduit alors la définition ainsi que quelques exemples avant de passer au principe du prolongement analytique qui est un premier résultat très puissant de cette nouvelle théorie comme on peut le voir avec le corollaire 5. On donne ensuite un deuxième résultat très puissant qui est celui des zéros isolé et on donne en application l'exemple 9. On continue ensuite en parlant des fonctions holomorphes en commençant par parler de $\mathbb{C}$-dérivabilité puis quelques exemples de fonctions holomorphes et de propriétés basiques telles que les conditions de Cauchy-Riemann ou la proposition 20. On termine cette première partie en parlant de déterminations du logarithme (dont l'intérêt est justifié par le fait que l'exponentielle est beaucoup utilisée et qu'il peut être pratique de l'inverser).
Dans une deuxième partie on parle du lien entre les fonctions holomorphes et analytiques en commençant par faire un petit détour par les intégrales curvilignes. On introduit donc au préalable tout le vocabulaire nécessaire ainsi que quelques exemples avant de parler de l'indice qui jouera un rôle central dans la suite de cette leçon. On donne ainsi la définition de l'indice par rapport à un chemin fermé ainsi que quelques propriétés avant de faire le lien avec les primitives et le théorème/formule de Cauchy sur un convexe. Dans un deuxième point on s'intéresse au lien entre holomorphie et analyticité et on montre qu'il y a en fait équivalence avec le théorème de Morera et cette équivalence va nous permettre de conjuguer les deux aspects afin d'obtenir de nouveaux résultats. On obtient ainsi les inégalités de Cauchy ainsi que les théorème de Liouville et de d'Alembert et le principe du maximum.
Dans une troisième partie on parle de fonctions méromorphes en commençant par parler de singularités. On introduit donc les différents types de singularités puis on introduit le concept de fonction méromorphe ainsi que la proposition 62 qui nous sera utile pour la suite. On parle ensuite dans un deuxième point d'un autre atout de l'analyse complexe : le calcul d'intégrales via le théorème des résidus ! On introduit tout d'abord la notion de résidu ainsi qu'un moyen de les calculer avant de finir cette partie par le théorème des résidus ainsi que deux exemples.
Enfin dans une dernière partie on donne quelques applications en commençant par parler de polynômes orthogonaux. On introduit les concepts de fonction poids et de polynômes orthogonaux avant de donner quelques exemples et le théorème 74 qui donne une base hilbertienne à $L^2(I,\rho)$. Finalement, on conclut cette leçon en parlant de suites et séries et notamment de convergence. On voit donc comment la notion de convergence uniforme sur tout compact implique encore une fois des théorèmes très puissants mais qui ne sont pas vrais dans le cas de l'analyse réelle !

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

I Fonctions holomorphes et analytiques

I.1 Fonctions analytiques

I.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1 : Fonction analytique [Tauvel, p.50] :
On dit qu'une fonction définie sur Ω est une **fonction analytique sur** Ω lorsqu'elle est développable en série entière en tout point de Ω.

Exemple 2 : [Tauvel, p.50]
$*$ La fonction inverse est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z-a| < a$ on a $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$.
$*$ Les fonctions exp, cos et sin sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytique sur Ω ($\mathcal{A}(\Omega)$ est alors une $\mathbb{C}$-algèbre contenant celle des polynômes)

Théorème 3 : [Tauvel, p.50]
Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme f est analytique sur le disque ouvert $\mathcal{D}(0, R)$.

I.1.2 Principe du prolongement analytique

Théorème 4 : Principe du prolongement analytique [Tauvel, p.52] :
Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
$*$ f est identiquement nulle sur Ω.
$*$ f est identiquement nulle sur un voisinage de a.
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 5 : [Tauvel, p.52]
Soient $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et que f et g coïncident sur un voisinage d'un point de Ω, alors $f = g$ sur Ω.

I.1.3 Principe des zéros isolés

Définition 6 : Partie discrète [Tauvel, p.52] :
On considère A une partie de Ω.
On dit que A est une **partie discrète de** Ω lorsque pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{D}(a,r) \cap A = \emptyset$.

Proposition 7 : [Tauvel, p.52]
Soit A une partie de Ω.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ Tout $z \in \Omega$ possède un voisinage V tel que $V \cap A$ soit fini.
$*$ Pour tout compact K de Ω, l'ensemble $K \cap A$ est fini.
$*$ A est une partie discrète et fermée de Ω.

Théorème 8 : Principe des zéros isolés [Tauvel, p.53] :
Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et que f est non identiquement nulle, alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω.

Exemple 9 : [Tauvel, p.54]
On suppose que Ω contient 0.
Il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand.

Corollaire 10 : [Tauvel, p.53]
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors l'anneau $\mathcal{A}(\Omega)$ est intègre.

Proposition 11 : [Tauvel, p.53]
Soient $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non identiquement nulle et $u \in \Omega$ un zéro de f.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :
$*$ On a $f^{(k)}(u) \neq 0$ et $f^{(p)}(u) = 0$ pour $[\![1;k]\!]$.
$*$ Le premier terme non nul du développement de f en série entière au voisinage de u est de la forme $a_k(z-u)^k$ avec $a_k \neq 0$.
$*$ Il existe un voisinage V de u dans Ω et $h \in \mathcal{A}(V)$ telle que, au voisinage de u, on ait : $f(z) = (z-u)^k h(z)$ et $h(u) \neq 0$.

Définition 12 : [Tauvel, p.53]
L'entier k de la proposition précédente est appelé **ordre du zéro de** f (ou encore **multiplicité du zéro de** f).

I.2 Fonctions holomorphes

I.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 13 : $\mathbb{C}$-dérivabilité [Tauvel, p.39] :
On dit qu'une fonction f est **$\mathbb{C}$-dérivable en** $z_0 \in \Omega$ lorsque la fonction :

$$\tau : \left| \begin{array}{ccc} \Omega \backslash \{z_0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \end{array} \right.$$

admet une limite lorsque z tend vers z_0.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(z_0)$ et est appelée **dérivée de** f **en** z_0.

Définition 14 : Fonction holomorphe [Tauvel, p.39] :
On dit qu'une fonction f est une **fonction holomorphe sur** Ω lorsque f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exemple 15 : [Tauvel, p.39]
Toute fonction analytique est holomorphe sur son disque de convergence.

Remarque 16 : [Tauvel, p.59]
La bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ permet d'identifier $f(z)$ avec $\widetilde{f}(x,y)$ (et c'est ce qu'on fera par la suite).

Proposition 17 : [Tauvel, p.59]
Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
$*$ f est dérivable en z_0.
$*$ $\widetilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

Corollaire 18 : Conditions de Cauchy-Riemann [Tauvel, p.60] :
Soit f une fonction définie sur Ω.
$f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si, et seulement si, $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Proposition 19 : [Tauvel, p.61]
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors f' identiquement nulle sur Ω implique que f est constante sur Ω.

Proposition 20 : [Tauvel, p.61]
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
* f est constante sur Ω. * $\mathrm{Re}(f)$ est constante sur Ω.
* $\mathrm{Im}(f)$ est constante sur Ω. * $|f|$ est constante sur Ω. * $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

I.2.2 Les déterminations continues du logarithme

Définition 21 : Détermination du logarithme [Tauvel, p.63] :
On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^*$.
On appelle **détermination du logarithme sur** Ω toute application continue $\ell : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \Omega$, $e^{\ell(z)} = z$.

Définition 22 : Détermination principale du logarithme [Tauvel, p.53] :
On appelle **détermination principale du logarithme** la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ par $\mathrm{Log}(z) = |z| + i\arg(z)$.

Définition 23 : Primitive [Tauvel, p.63] :
On considère f une fonction continue sur Ω.
On appelle **primitive de** f **sur** Ω toute fonction $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $F' = f$.

Théorème 24 : [Tauvel, p.63]
Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$, alors :
* Toute détermination principale du logarithme définie sur Ω est une primitive de $\frac{1}{z}$ sur Ω.
* Si $\frac{1}{z}$ admet une primitive sur Ω, alors il existe des déterminations du logarithme sur Ω.

Proposition 25 : [Tauvel, p.64]
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

II Holomorphie et analyticité

II.1 Intégrales curvilignes

Définition 26 : Arc (fermé) [Tauvel, p.67] :
On appelle **arc (fermé)** toute application continue γ d'un intervalle compact $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$).

Définition 27 : Arc opposé [Tauvel, p.67] :
On considère $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un arc.
On appelle **arc opposé à** γ l'arc δ définit par $\delta(t) = \gamma(a+b-t)$.

Définition 28 : Arc composé [Tauvel, p.67] :
On considère $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\delta : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux arcs tels que $\gamma(b) = \delta(c)$.
On appelle **arc composé de** γ **et** δ l'arc β définit par :

$$\forall t \in [a;b+d-c],\ \beta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [a;b] \\ \delta(t) & \text{si } t \in]b;b+d-c] \end{cases}$$

Définition 29 : Chemin [Tauvel, p.68] :
On appelle **chemin dans** Ω tout arc γ dans Ω de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 30 : Chemins équivalents [Tauvel, p.68] :
On dit que deux chemins $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\delta : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des **chemins équivalents** lorsqu'il existe une application φ bijective, croissante de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, dont la réciproque est également $\mathcal{C}^1$ par morceaux et telle que $\gamma = \delta \circ \varphi$.

Exemple 31 : [Tauvel, p.68]
* On considère $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.
Le chemin fermé :

$$\gamma : \left|\begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + re^{it} \end{array}\right.$$

est appelé **cercle de centre** z_0 **et de rayon** r.
* On considère $u, v \in \mathbb{C}$.
Le chemin :

$$\gamma : \left|\begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (1-t)u + tv \end{array}\right.$$

est appelé **segment orienté d'origine** u **et d'extrémité** v.
* On considère $u, v, w \in \mathbb{C}$ avec u, v et w deux à deux distincts.
On appelle **triangle de sommets** u, v **et** w l'ensemble :

$$T(u,v,w) = \left\{t_1 u + t_2 v + t_3 w,\ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } t_1 + t_2 + t_3 = 1\right\}$$

Définition 32 : Intégrale sur un chemin [Tauvel, p.69] :
On considère un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$.
On appelle **intégrale de** f **sur** γ la quantité :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 33 : [Tauvel, p.69]
Soient $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\delta : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins équivalents et f continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$.
On a la l'égalité : $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\delta f(z)\mathrm{d}z$.

Exemple 34 : [Tauvel, p.70]
Avec les notations de l'exemple 31, on a :
* Pour un cercle :
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = it\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{it}\right)e^{it}\mathrm{d}t$$
* Pour un segment :
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = (b-a)\int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t$$

Définition 35 : Indice par rapport à un chemin fermé [Tauvel, p.71] :
On considère $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ chemin fermé et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$.
On appelle **indice de λ par rapport à** γ le nombre $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\lambda}$.

Théorème 36 : [Tauvel, p.71]
Soient $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et chemin fermé et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$.
L'application $\lambda \longmapsto \mathrm{Ind}_\gamma(\lambda)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

Remarque 37 : [Tauvel, p.72]
Intuitivement, $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda)$ représente le "nombre de tours" (compté algébriquement) décrit par $\gamma(t)$ autour de z quand t parcours $[a;b]$

Exemple 38 : [Tauvel, p.72]
On considère $r > 0$ et $\gamma = \mathcal{C}(a,r)^+$.
$\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ a alors deux composantes connexes et pour tout $\lambda \in \mathcal{D}(a,r)$ on a $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = 1$ et 0 sinon.

Théorème 39 : [Tauvel, p.72]
Soit f une fonction continue sur Ω.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* f admet une primitive sur Ω.
* Pour tout chemin fermé γ dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Théorème 40 : [Tauvel, p.74]
Soit f une fonction continue sur Ω.
Si pour tout triangle $\Delta \subseteq \Omega$ on a $\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$, alors f possède une primitive dans Ω.

Théorème 41 : [Tauvel, p.74]
Soient $w \in \Omega$ et f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\backslash\{w\}$.
Pour tout triangle $\Delta \subseteq \Omega$, on a $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$.

Théorème 42 : Théorème de Cauchy sur un convexe [Tauvel, p.76] :
Soient $w \in \Omega$ et f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\backslash\{w\}$.
Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, alors f possède une primitive sur Ω et, pour tout chemin fermé γ dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Théorème 43 : Formule de Cauchy pour un convexe [Tauvel, p.77] :
Soient γ un chemin fermé sur Ω, $\lambda \in \Omega\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Si Ω est convexe, alors $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$.

II.2 Analyticité des fonctions holomorphes

Théorème 44 : [Tauvel, p.77]
Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
* On a $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a,\mathbb{C}\backslash\Omega)$.
* Si Ω est convexe et si γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, alors on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

Corollaire 45 : [Tauvel, p.78]
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
La fonction f est indéfiniment dérivable sur Ω.

Théorème 46 : Théorème de Morera [Tauvel, p.78] :
Soit f une fonction continue sur Ω.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* f est holomorphe sur Ω. * f est analytique sur Ω.
* f possède localement une primitive sur Ω.
* Pour tout triangle $\Delta \subseteq \Omega$, on a $\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Corollaire 47 : [Tauvel, p.78]
Soient $w \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{w\})$.
Si f est continue sur Ω, alors f est holomorphe sur Ω.

II.3 Conséquences

II.3.1 Inégalités de Cauchy

Théorème 48 : Inégalités de Cauchy [Tauvel, p.84] :
Soient $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}(0,R))$.
On a alors pour tout $z \in \mathcal{D}(0,R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et pour tout $r \in]0;R[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{\sup\limits_{|z|=r} |f(z)|}{r^n}$$

Théorème 49 : Théorème de Liouville [Tauvel, p.84] :
Toute fonction entière et bornée est constante.

Théorème 50 : Théorème de d'Alembert [Tauvel, p.84] :
Tout polynôme d'une variable à coefficient complexe et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

II.3.2 Principe du maximum

Proposition 51 : [Tauvel, p.85]
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
La fonction f possède la propriété de la moyenne sur Ω

Proposition 52 : [Tauvel, p.86]
Soit f une fonction continue sur Ω.
Si f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω, alors f vérifie le principe du maximum sur Ω.

Lemme 53 : Lemme de Schwartz [Tauvel, p.87] :
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}(0,1))$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathcal{D}(0,1)$.
$*$ Pour tout $z \in \mathcal{D}(0,1)$, $|f(z)| \leq |z|$. $\quad *$ $|f'(0)| \leq 1$.
En outre, si $|f'(0)| = 1$ ou s'il existe $z \in \mathcal{D}(0,1)\backslash\{0\}$ tel que $|f(z)| = |z|$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathcal{D}(0,1)$.

III Fonction méromorphes

III.1 Séries de Laurent et singularités

Définition 54 : Singularité isolée [Tauvel, p.99] :
On considère $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$.
On appelle **singularité isolée de** f le point a.

Définition 55 : Singularité artificielle [Tauvel, p.99] :
On considère $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$.
Lorsque f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a, on dit que a est une **singularité artificielle de** f.

Proposition 56 : [Tauvel, p.99]
Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$.
S'il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $\Omega \cap \mathcal{D}(a,r)\backslash\{a\}$, alors a est une singularité artificielle de f.

Proposition 57 : [Tauvel, p.99]
Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$.
f vérifie une et une seule des propriétés suivantes :
$*$ f a une singularité artificielle en a.
$*$ Il existe une unique suite finie de nombres complexes $(a_{-1}, ..., a_{-m})$ (avec $m \geq 1$ et $a_{-m} \neq 0$) telle que la fonction $z \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ ait une singularité artificielle en a. On dit alors que a est **un pôle d'ordre** m **de** f et que le polynôme $\sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{-k}$ en $(z-a)^{-1}$ est la partie principale de f en a.
$*$ Pour tout $r > 0$ tel que $\mathcal{D}(a,r) \subseteq \Omega$, l'ensemble $f(\mathcal{D}(a,r)\backslash\{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que f a une **singularité essentielle en** a.

Proposition 58 : [Tauvel, p.100]
Avec les notations de la proposition précédente, les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ f a un pôle d'ordre m en a.
$*$ Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{D}(a,r) \subseteq \Omega$ et $g \in \mathcal{H}(\mathcal{D}(a,r))$ vérifiant $g(a) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ pour tout $z \in \mathcal{D}(a,r)\backslash\{a\}$.

Exemple 59 : [Tauvel, p.101]
La fonction $z \longmapsto e^{\frac{1}{z}}$ admet une singularité essentielle en 0.

Définition 60 : Fonction méromorphe [Tauvel, p.101] :
Une fonction f sur Ω est une **fonction méromorphe sur** Ω lorsqu'il existe une partie localement finie A de Ω telle que $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash A)$ et telle que les points de A sont des pôles de f.

On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω.

Proposition 61 : [Tauvel, p.101]
Si l'ouvert Ω est connexe, alors $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps.

Proposition 62 : [Tauvel, p.102]
Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.
$*$ On a $f' \in \mathcal{M}(\Omega)$ (en outre f et f' ont les mêmes pôles). De plus, si a est un pôle d'ordre m de f, alors a est un pôle d'ordre $m+1$ de f'.
$*$ Si de plus Ω est connexe et $f \neq 0$, alors $g = \frac{f}{f'} \in \mathcal{M}(\Omega)$ et tous les pôles de g sont simples.

III.2 Théorème des résidus et applications

Définition 63 : Résidu d'une fonction [Tauvel, p.102] :
Soient $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ un pôle d'ordre m de f.
La partie principale de f en a est : $P(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{-k}(z-a)^k$. On appelle **résidu de f en a** la quantité α_{-1}.

Lemme 64 : [Tauvel, p.102]
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, γ un chemin fermé dans Ω et $a \in \Omega$ un pôle d'ordre m en f.
Si $a \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, alors $\int_\gamma P(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$.

Développement 1 : [A] [cf. TAUVEL]

Lemme 65 : [Tauvel, p.103]
Soient $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et a un pôle simple de f.
Si f s'écrit sous la forme $f = \frac{g}{h}$ au voisinage de a, alors on a l'égalité : $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

Théorème 66 : Théorème des résidus [Tauvel, p.103]
Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, ..., a_n$ des points deux à deux distincts de Ω qui sont des pôles de f et $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a_1, .., a_n\})$.
Si γ est un chemin fermé sur Ω dont l'image ne contient aucun des a_k, alors on a :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k)$$

Exemple 67 : [Tauvel, p.104]
Pour $a > 1$ fixé, on a $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin(t)}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Développement 2 : [B] [cf. TAUVEL]

Exemple 68 : [Tauvel, p.193]
On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel tel que $n > \alpha + 1 > 0$.
On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{n}\right)}$$

IV Applications

IV.1 Polynômes orthogonaux

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a;b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 69 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur I** une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 70 : L'espace $L^2(I,\rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I,\rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 71 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I,\rho)$.

Théorème 72 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I,\rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ρ).

Exemple 73 : [El Amrani, p.41]
$*$ Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
$*$ Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
$*$ Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
$*$ Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Développement 3 : [cf. EL AMRANI]

Théorème 74 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Remarque 75 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0;+\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

IV.2 Suites et séries

Définition 76 : Convergence uniforme sur tout compact [Tauvel, p.89] :
On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur Ω.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout compact** lorsqu'il existe une fonction f sur Ω telle que pour tout compact K de Ω la suite $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f|_K$.

Théorème 77 : [Tauvel, p.89]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(j)}$.

Théorème 78 : [Tauvel, p.90]
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur tout compact.
Si l'on note f la somme de cette série, alors :
$*$ $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact vers f'.
$*$ Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout compact, il en est de même de la série $\sum f_n'$.
$*$ Si la série $\sum |f_n|$ est uniformément convergente sur tout compact, il en est de même de la série $\sum |f_n'|$.

Remarques sur la leçon

- L'holomorphie est une condition très forte et il n'est pas facile d'être holomorphe !
- C'est une leçon vaste, il faut donc rester sur ce que l'on maîtrise.
- On peut également parler de l'espace de Bergman, de la fonction Γ et de son étude ou encore des produits infinis.

Liste des développements possibles

- Illustration du théorème des résidus.
- Polynômes orthogonaux.

Bibliographie

- Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la Licence 3*.
- Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.