Leçon 244 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Extrait du rapport de jury

En 2023, cette leçon portait le numéro 265.
Si les fonctions usuelles élémentaires (logarithme, exponentielles, fonctions trigonométriques, etc) font partie de la leçon et doivent être maîtrisées, le jury attend en complément un panel d'exemples plus ambitieux. On ne peut bien sûr pas être exhaustif.
Il s'agit de proposer un choix pertinent de fonctions spéciales rencontrées dans divers domaines des mathématiques (fonction Γ en analyse complexe, densités de lois variées en probabilités, fonctions ζ, η ou séries L en théorie des nombres, etc.) avec des applications significatives. On peut très bien organiser l'exposé en fonction des techniques mathématiques utilisées, ou selon les applications envisagées.
Pour les candidates et candidats solides, la résolution d'équations aux dérivées partielles, la théorie analytique des nombres, les propriétés de stabilité de certaines lois en probabilités, les applications diverses des polynômes orthogonaux, etc., sont des sources d'inspiration possibles pour cette leçon.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 244 intitulée : "Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.". L'objectif de cette leçon sera de s'intéresser d'une part à certaines fonctions usuelles en en donnant les propriétés fondamentales ou les plus remarquables ainsi que quelques applications, puis d'autre part à des fonctions spéciales mais qui sont couramment utilisées pour résoudre divers problèmes.
Dans une première partie on s'intéresse aux fonctions logarithme et exponentielle réelles. On commence tout d'abord par rappeler les définitions des fonctions logarithme népérien et exponentielle ainsi que les propriétés algébriques et analytiques de base. On définit ensuite les fonctions circulaires ainsi que leurs fonctions réciproques avec l'arc cosinus, l'arc sinus et l'arc tangente. On termine cette première partie avec les fonctions hyperboliques en rappelant les définitions ainsi que les propriétés de base.
Dans une deuxième partie on passe au cas complexe où l'on va étendre les fonctions exponentielles et trigonométriques (ces fonctions coïncident donc sur $\mathbb{R}$ avec celles définies précédemment). On commence par le cas de la fonction exponentielle où on la définit dans $\mathbb{C}$ par sa série entière et on donne des propriétés algébriques de calcul et de morphisme. On fait ensuite un bref retour sur les fonctions circulaires en les définissant par les formules d'Euler puis l'on donne ensuite la formule de De Moivre qui permet de linéariser les puissances de cosinus et sinus. On conclut ce point par le développement en série entière du cosinus et du sinus puis la définition des fonctions hyperboliques complexes et leurs développement en série entière. On termine cette partie par le logarithme complexe en parlant notamment de la détermination principale du logarithme ainsi que certaines de ces propriétés, ce qui permet de parler de puissance complexe d'un nombre complexe.
Dans une troisième partie on commence à s'intéresser à des fonctions spéciales mais très connues ou couramment utilisées dans divers domaines des mathématiques. On commence par le cas de la fonction Γ avec la formule d'Euler-Gauss ainsi que le théorème de Bohr-Mollerup et le lien avec la fonction bêta. On poursuit dans la même veine avec la fonction ζ de Riemann où l'on donne quelques propriétés analytiques : convergence normale, continuité, dérivabilité, etc. Ainsi qu'un développement asymptotique et en produit eulérien et enfin une application à la série des inverses des nombres premiers. Dans une troisième sous-partie, on s'intéresse à la transformée de Fourier d'une fonction dans le cadre $L^1(\mathbb{R})$ qui permet par exemple de résoudre des équations où la convolution apparaît. On rappelle ainsi la définition de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que quelques propriétés de base. On donne ensuite deux exemples de transformée de Fourier avant de démontrer la formule d'échange, l'injectivité de la transformée de Fourier et la formule d'inversion.
Enfin dans une dernière partie on s'intéresse à la théorie des probabilités avec l'étude de la fonction caractéristique. On rappelle la définition de la convergence en loi et de la fonction caractéristique avant de continuer par quelques exemples ainsi que le théorème de Lévy qui ramène l'étude d'une convergence en loi à la convergence simple d'une suite de fonctions et le théorème central-limite. On conclut cette leçon avec un lien entre les

probabilités et la fonction Γ dont on a parlé précédemment via l'étude des lois gamma. On fait le lien entre les lois exponentielles et gamma et on montre que ces dernières sont stables par somme.

Plan général

Cours détaillé

I Logarithme et exponentielle réels

I.1 Le logarithme népérien

Définition 1 : Logarithme népérien [Deschamps (1), p.204] :
On appelle **fonction logarithme népérien** (notée ln) l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse qui s'annule en 1.

Proposition 2 : [Deschamps (1), p.205]
$*$ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
$*$ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Proposition 3 : [Deschamps (1), p.205]
La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$.

I.2 L'exponentielle réelle

Définition 4 : Exponentielle [Deschamps (1), p.206] :
On appelle **exponentielle** (notée exp) la fonction réciproque de la fonction logarithme.

Proposition 5 : [Deschamps (1), p.206]
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),\ \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \text{ et } \exp(nx) = \exp(x)^n$$

Proposition 6 : [Deschamps (1), p.206]
$*$ La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\exp(0) = 1$ ainsi que $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$.
$*$ La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

I.3 Fonctions circulaires

Définition 7 : Fonction cosinus et sinus [Deschamps (1), p.157] :
On appelle **cosinus** (respectivement **sinus**) l'abscisse (respectivement l'ordonnée) de toute nombre complexe de module 1.

Proposition 8 : [Deschamps (1), p.51]
$*$ La fonction sin est impaire, 2π-périodique et $\sin' = \cos$.
$*$ La fonction cos est paire, 2π-périodique et $\cos' = -\sin'$.

Proposition 9 : Formules d'addition [Deschamps (1), p.52]
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a les formules $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.

Définition 10 : Fonction Arc cosinus [Deschamps (1), p.215] :
La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$, elle définit donc une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$ dont la fonction réciproque est appelée **arc cosinus** et notée Arccos.

Proposition 11 : [Deschamps (1), p.217]
Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 12 : [Deschamps (1), p.217]
La fonction Arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et $\mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 13 : Fonction Arc sinus [Deschamps (1), p.214] :
La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, elle définit donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$ dont la fonction réciproque est appelée **arc sinus** et notée Arcsin.

Proposition 14 : [Deschamps (1), p.217]
Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 15 : [Deschamps (1), p.217]
La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et $\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 16 : Fonction Arc tangente [Deschamps (1), p.212] :
La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, elle définit donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$ dont la fonction réciproque est appelée **arc tangente** et notée Arctan.

Proposition 17 : [Deschamps (1), p.213]
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 18 : [Deschamps (1), p.217]
La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

I.4 Fonctions hyperboliques

Définition 19 : Cosinus et sinus hyperbolique [Deschamps (1), p.218] :
On appelle **sinus hyperbolique** et **cosinus hyperboliques** (respectivement notée sh et ch) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Proposition 20 : [Deschamps (1), p.218]
* La fonction sh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
* La fonction ch est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

Proposition 21 : [Deschamps (1), p.219]
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(t) = \mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t),\ \exp(-t) = \mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t) \text{ et } \mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$$

Définition 22 : Tangente hyperbolique [Deschamps (1), p.219] :
On appelle **tangente hyperbolique** (notée th) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Proposition 23 : [Deschamps (1), p.218]
La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2$.

II Logarithme et exponentielle complexes

II.1 Exponentielle complexe

Définition 24 : Fonction exponentielle complexe [Tauvel, p.43] :
On définit la fonction **exponentielle complexe** par :

$$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

Proposition 25 : [Tauvel, p.43]
Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'},\ e^z \neq 0,\ (e^z)^{-1} = e^{-z},\ |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \text{ et } |e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$$

Théorème 26 : [Tauvel, p.44 + 45]
La fonction exponentielle complexe induit un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ continu qui est surjectif et de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

II.2 Retour sur les fonctions circulaires

Définition 27 : Fonctions cosinus et sinus complexes [Tauvel, p.45] :
On appelle **fonction cosinus complexe** et **fonction sinus complexe** les fonctions respectivement définies par :

$$\cos : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sin : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) \end{array} \right.$$

Remarque 28 :
Les formules donnant la définition du cosinus et sinus complexes ci-dessus sont appelées les formules d'Euler.

Proposition 29 : Formule de De Moivre [Deschamps (1), p.158] :
Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et tous $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Exemple 30 : [Deschamps (1), p.160]

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{32}\left(\cos(5\theta)+5\cos(3\theta)+10\cos(\theta)\right)$$

Proposition 31 : [Deschamps (1), p.159]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cos^{n-(2k+1)}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)$$

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta)$$

Proposition 32 : [Tauvel, p.46]
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les développements en série entière suivants :

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On définit de manière analogue les fonctions sinus et cosinus hyperbolique dans $\mathbb{C}$:

Définition 33 : Fonctions hyperboliques complexes [Tauvel, p.46] :
On appelle **fonction cosinus hyperbolique complexe** et **fonction sinus hyperbolique complexe** les fonctions respectivement définies par :

$$\mathrm{ch} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2i}\left(e^{z}-e^{-z}\right) \end{array} \right.$$

Proposition 34 : [Tauvel, p.46]
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les développements en série entière suivants :

$$\mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

II.3 Logarithme complexe

Définition 35 : Fonction logarithme [Tauvel, p.63] :
On considère Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
On appelle **fonction logarithme sur** Ω toute fonction continue $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \Omega,\ e^{L(z)} = z$.

Remarque 36 :
Si 0 appartient à Ω, alors il n'existe pas de fonction logarithme sur Ω.

Lemme 37 : [Tauvel, p.45 + 63]
$*$ Pour $\omega \in \mathbb{C}$, on a : $e^{\omega} = 1 \iff \exists m \in \mathbb{Z}$ tq $\omega = 2i\pi m$.
$*$ Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $L_1, L_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions logarithmes.
Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $z \in \Omega,\ L_1(z) = L_2(z) + 2i\pi m$.

Définition 38 : Détermination principale du logarithme [Tauvel, p.63] :
Pour $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, on a $z = re^{i\theta}$ et on pose $\mathrm{Log}(z) = \ln(r) + i\theta$ que l'on appelle **détermination principale du logarithme**.

Théorème 39 :
La fonction $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction logarithme et holomorphe.

Proposition 40 : [Tauvel, p.63]
$*$ Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\Delta_\alpha = \left\{re^{i\alpha},\ r \geq 0\right\}$.
Il existe une fonction logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\Delta_\alpha$.
$*$ Il n'existe pas de fonctions logarithme sur $\mathbb{C}^*$.
$*$ Soit $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction logarithme.
L est holomorphe et pour tout $z \in \Omega,\ L'(z) = \frac{1}{z}$.

Proposition 41 : [Tauvel, p.63]
Pour tout $z \in \mathcal{D}(0,1)$, $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.

Définition 42 : Fonction puissance :
On considère $\alpha \in \mathbb{C}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, on appelle **puissance** le complexe $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(z)}$.

Proposition 43 :
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $f_\alpha : z \longrightarrow z^\alpha$ est holomorphe et $f'_\alpha(z) = \alpha z^{\alpha-1}$.

III Analyse complexe et de Fourier

III.1 Quelques résultats sur la fonction Γ

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

Développement 1 : [cf. GOURDON]

Proposition 44 : [Gourdon, p.315]
* Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
* La fonction Γ est log-convexe sur $]0;+\infty[$.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
* On a $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Lemme 45 : Formule d'Euler-Gauss [Gourdon, p.315] :
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Théorème 46 : Théorème de Bohr-Mollerup [Rombaldi (2), p.366] :
Si une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifie :
* f est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. * $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = xf(x)$.
* $f(1) = 1$
Alors f coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction Γ.

On note $\mathcal{H}$ le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \operatorname{Re}(z) > 1\}$.

Proposition 47 : [Rombaldi (2), p.555]
La fonction Γ est définie sur $\mathcal{H}$.

Définition 48 : Fonction bêta [Rombaldi (2), p.566] :
On appelle **fonction bêta** la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par la formule suivante : $B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\mathrm{d}t$.

Théorème 49 : [Rombaldi (2), p.567]
Pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, on a $B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.

III.2 La fonction ζ de Riemann

Proposition 50 : [Deschamps (2), p.525]
La fonction zêta $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1;+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$.

Proposition 51 : [Gourdon, p.302]
On a $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$ et $\zeta(s) \underset{1^+}{=} \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$.

Proposition 52 : [Gourdon, p.302]
Pour tout $s > 1$, on a $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}}$

Exemple 53 : [Gourdon, p.302]
La série $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

III.3 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 54 : Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.109 + 110] :
On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On appelle **transformée de Fourier de** f l'application :

$$\widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Puis **transformation de Fourier** l'application :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lemme 55 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.109] :
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 56 : [El Amrani, p.110]
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.

Corollaire 57 : [El Amrani, p.111]
La transformation de Fourier est une application qui est linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemple 58 : [El Amrani, p.111]
On considère l'application $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
On a $p \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout réel $A > 0$ fixé, on a :

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-A(1-i\xi)}}{1 - i\xi} + \frac{1 - e^{-A(1+i\xi)}}{1 + i\xi}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient : $\mathcal{F}(p)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Exemple 59 : [El Amrani, p.111]
On considère $[a;b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_{[a;b]}$ (avec $a < b$).
La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{e^{\frac{i(b-a)\xi}{2}} - e^{-\frac{i(b-a)\xi}{2}}}{i\xi}e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}}$$

Et comme $\widehat{f}(0) = b - a$, on a finalement :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b - a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Proposition 60 : [El Amrani, p.114]
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Remarque 61 : [El Amrani, p.114]
On peut montrer grâce à ce résultat qu'il n'y a pas d'élément neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Développement 2 : [cf. EL AMRANI]

Proposition 62 : [El Amrani, p.112]
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Théorème 63 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$.

Théorème 64 : [El Amrani, p.115]
La transformation de Fourier est une application injective.

Exemple 65 : [El Amrani, p.116]
L'équation $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'admet pas de solutions dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 66 : Formule d'inversion [El Amrani, p.116] :
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$

IV Théorie des probabilités

IV.1 Fonction caractéristique

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 67 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 68 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array} \right.$$

Remarque 69 : [Chabanol, p.43]
Ceci permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X (elle existe toujours car $\left|e^{itX}\right| = 1$ et $\mathbb{P}_X$ est une mesure bornée).
On en déduit de plus que Φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 70 : [Chabanol, p.44]
La somme de variables aléatoires indépendantes est égale au produit de leurs fonctions caractéristiques.

Proposition 71 : [Chabanol, p.45]
Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la fonction caractéristique du couple est le produit de leurs fonctions caractéristiques.

Exemple 72 :
* Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1 - p + pe^{it}$.
* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
* Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Proposition 73 : [Chabanol, p.44]
* On a $\Phi_X(0) = 1$.
* De plus, si X^k est intégrable pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors les dérivées à l'origine existent jusqu'à l'ordre k et $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\left(X^k\right)$.

En particulier, $\Phi_X'(0) = i\mathbb{E}(X)$ et $\Phi_X''(0) = -\mathbb{E}\left(X^2\right)$.

Exemple 74 : [Deschamps (2), p.525]
La fonction zêta $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1;+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$.

Développement 3 : [cf. QUEFFELEC]

Lemme 75 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Théorème 76 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
$*$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
$*$ La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Théorème 77 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

IV.2 Application de la fonction Γ en probabilités

Définition 78 : Loi gamma [Rombaldi, p.781] :
On considère a et λ deux réels strictement positifs.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la **loi gamma de paramètres a et λ** lorsqu'elle possède une densité définie par $f_{a,\lambda} : t \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

Remarque 79 : [Rombaldi, p.782]
La loi $\Gamma(1,\lambda)$ correspond à la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

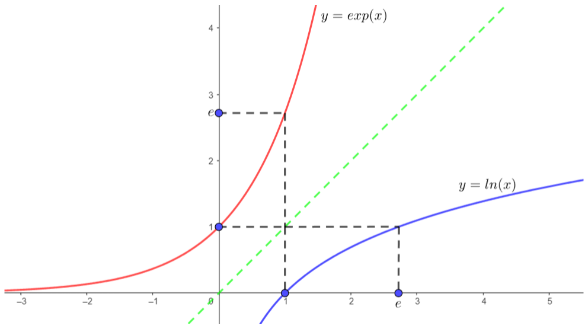
Théorème 80 : [Rombaldi, p.782]
Si $(X_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, X_k suit une loi $\Gamma(a_k,\lambda)$, alors la variable aléatoire réelle $\sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi gamma de paramètres $\sum_{k=1}^n a_k$ et λ.

Corollaire 81 : [Rombaldi, p.783]
Si $(X_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, X_k suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors la variable aléatoire réelle $\sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi gamma de paramètres n et λ.

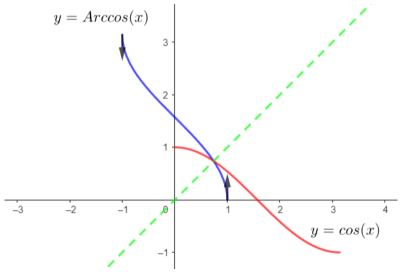
Remarque 82 :
On remarque alors que les lois exponentielles ne sont pas stables par somme. Cependant, on peut les "plonger" dans les lois gamma qui elles sont stables par somme.

V Annexe

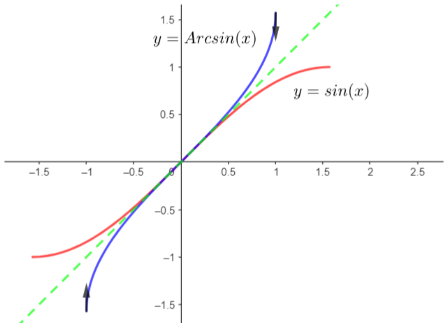
V.1 Représentation graphique des fonctions ln et exp



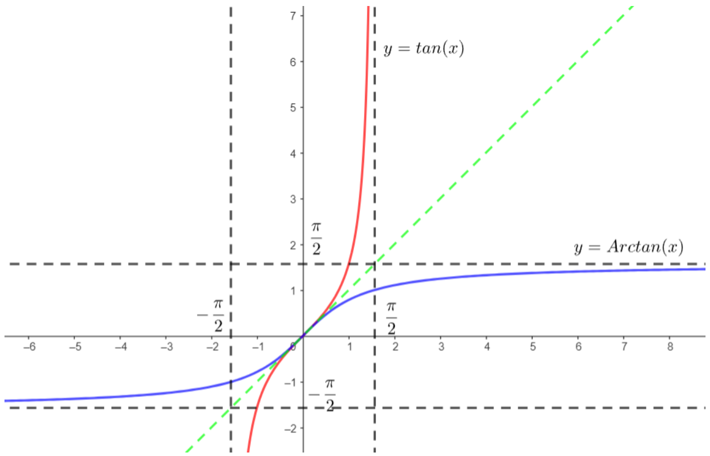
V.2 Représentation graphique des fonctions cos et Arccos



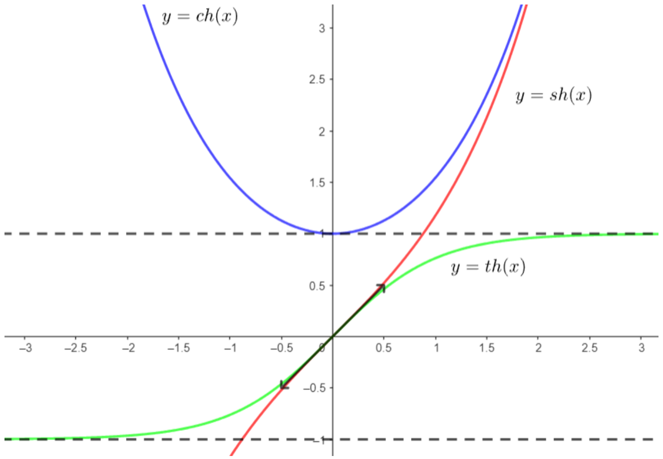
V.3 Représentation graphique des fonctions sin et Arcsin



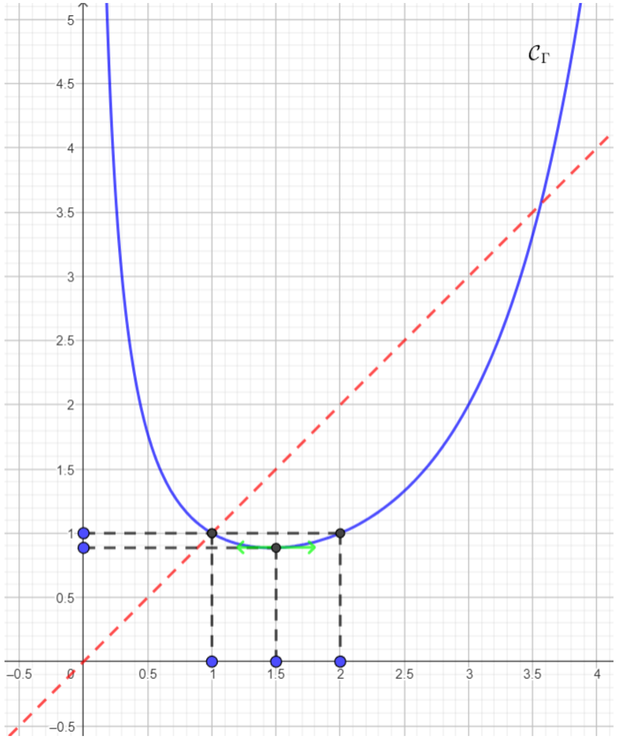
V.4 Représentation graphique des fonctions tan et Arctan



V.5 Représentation graphique des fonctions hyperboliques



V.6 Allure de la fonction Γ



Remarques sur le plan

— On peut s'attarder d'avantage sur les fonctions Γ et ζ en en faisant une meilleure description ou encore parler des noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Liste des développements possibles

— Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$.

— Injectivité de la transformée de Fourier.

— Théorème de Lévy + TCL.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et Probabilités*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.