Leçon 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Extrait du rapport de jury

L'étude des différents modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés.
Les fonctions "spéciales" définies par une série sont légion et fournissent aux candidates et candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables, ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés.
Les candidates et candidats peuvent bien sûr aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Ils préféreront dans ce cas en présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales (comme la fonction θ de Jacobi, etc.), la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 241 intitulée : "Suite et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples". Pourquoi "Exemples et contre-exemples" ? Eh bien parce que nous allons voir qu'il existe plusieurs modes de convergence pour répondre à des problèmes de convergence de suites de fonctions ou bien encore de passage à la limite et de continuité.
Dans un premier temps, on s'intéresse aux différentes notions de convergence et tout d'abord dans le cadre des suites de fonctions. On énonce tout d'abord la définition de la convergence simple et on donne un exemple. On remarque dans cette exemple que la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue. La notion de convergence simple ne suffit alors pas... Il nous faut un autre mode de convergence plus fort : la convergence uniforme. On remarquera avec l'exemple 5, la proposition 6 et la remarque 7 que la convergence uniforme implique la convergence simple et la convergence uniforme sur tout compact mais que cependant les deux réciproques sont fausses ! On conclut enfin cette première sous-partie en énonçant le critère de Cauchy-uniforme. On s'intéresse ensuite aux séries de fonctions où les deux notions de convergences précédentes ne sont que des reformulations avec les suites des sommes partielles des séries. Cependant, on voit apparaître deux nouveaux modes de convergences très pratiques avec les séries de fonctions : la convergence normale et la convergence absolue. On retrouve également divers implications entre les différents modes de convergence.
Dans un deuxième temps, on s'intéresse aux propriétés de la convergence uniforme. Tout d'abord on regarde ce qu'elle apporte en termes de continuité. On retrouve bien sûr le théorème 19 qui est dans l'esprit de la création de la convergence uniforme. De plus, celui-ci admet deux réciproques partielles connues sous le nom de "théorèmes de Dini". La convergence uniforme permet également l'interversion de symboles comme on peut le voir dans le théorème de la double limite et comme on le verra encore dans la suite de cette partie. Désormais on s'intéresse aux liens entre l'intégrabilité et la convergence uniforme d'une suites de fonctions. Le résultat majeur de cette partie est le théorème 27 qui permet encore une fois d'intervertir des symboles et ici les symboles lim et $\int$. Enfin, dans la dernière sous-partie consacrée à la dérivabilité, on retrouve le même genre de résultat avec le théorème 31 mais qui nécessite plus d'hypothèse que la simple convergence uniforme de la suite de fonctions (comme le montre l'exemple 32) et qui permet de montrer qu'une limite de suites de fonctions est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle donné ou de dériver termes à termes une série de fonctions par exemple.
Dans un dernier temps, on donne plusieurs applications des suites et séries de fonctions dans divers domaines des mathématiques. Tout d'abord, avec les séries entières où l'on commence par définir ce qu'est une série entière ainsi qu'un rayon de convergence avant de parler de calcul de rayon de convergence et de convergence absolue et normale ainsi que du théorème d'Abel angulaire et du théorème taubérien faible qui sont des résultats de continuité et qui traitent de l'épineux problème de la convergence sur le bord du disque de convergence. Ensuite, on s'intéresse aux séries de Fourier qui sont

aussi très utiles car il existe beaucoup de modes de convergences différents et cela donne beaucoup de richesse à ce domaine. Enfin, on termine cette leçon par parler de probabilités avec le processus de Galton-Watson où l'on en rappelle le fonctionnement ainsi que des résultats généraux et enfin la convergence en loi qui se ramène en fait à l'étude de la convergence simple d'une suite de fonctions spéciales avec le théorème de Lévy.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère X un ensemble non vide quelconque, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E et enfin $f : X \longrightarrow E$.

I Différentes notions de convergence

I.1 Suites de fonctions

Définition 1 : Convergence simple [Deschamps, p.502] :

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement (CVS) vers** f sur X lorsque pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge vers $f(x)$.

Remarque 2 : [Deschamps, p.504]

Le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f se traduit ainsi :

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \implies (\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \varepsilon)$$

Exemple 3 : [Deschamps, p.503]

Prenons $X = [0;1]$, $E = \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers la fonction $\mathbb{1}_{\{1\}}$ sur X.

Définition 4 : Convergence uniforme [Deschamps, p.504] :

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément (CVU) vers** f sur X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in X,\ (n \geq N) \implies (\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \varepsilon)$$

Exemple 5 : [Ramis, p.550]

La convergence de la suite de l'exemple 3 n'est pas uniforme car $\|f_n - 0\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} x^n = 1$.

Cependant, si on considère un réel $a \in [0;1[$ et que l'on note $X_a = [0;a]$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x\in X_a} x^n = a^n$.
En conclusion, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est uniforme sur X_a pour tout a, mais pas uniforme sur X.

Proposition 6 : [Deschamps, p.505]

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur X, alors elle CVS vers f sur X.

Remarque 7 :

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple 5.

Proposition 8 : Critère de Cauchy-uniforme [Ramis, p.551] :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } (p, q \geq N) \implies (\forall x \in X,\ \|f_p(x) - f_q(x)\|_E \leq \varepsilon)$$

Corollaire 9 : [Ramis, p.551]
L'ensemble des fonctions continues et bornées sur X muni de la norme infinie est un espace complet.

I.2 Série de fonctions

Définition 10 : Série de fonctions [Ramis, p.561] :
On appelle **série des fonctions** f_n, notée $\sum f_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 11 : Convergence simple et uniforme [Ramis, p.561] :
On dit que la série $\sum f_n$:
* **CVS** sur X lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur X vers une fonction notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
* **CVU** sur X lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur X.

Proposition 12 : [Deschamps, p.516]
La série $\sum f_n$ CVU si, et seulement si, la série converge simplement et la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers la fonction nulle.

Exemple 13 : [Deschamps, p.516]
Si l'on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{x+n^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la série $\sum f_n$ CVU.

Définition 14 : Convergence absolue et normale [Deschamps, p.517] :
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$:
* **converge absolument** (CVA) sur X lorsque pour tout $x \in X$, la série $\sum \|f_n(x)\|_E$ est convergente.
* **converge normalement** (CVN) sur X lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite f_n est bornée et la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Exemple 15 : [Deschamps, p.517]
La série $\sum (x(1-x))^n$ CVN sur $[0;1]$.

Théorème 16 : [Deschamps, p.518 + 519]
Si $\sum f_n$ CVN sur X, alors elle CVA et CVU sur X.

Remarque 17 :
En particulier, si $\sum f_n$ CVN sur X, alors elle CVS sur X. On a alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{CVN} & \Longrightarrow & \text{CVA} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{CVU} & \Longrightarrow & \text{CVS} \end{array}$$

Exemple 18 : [Hauchecorne, p.254]
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[n;n+1[}(x) \end{array} \right.$$

converge absolument et uniformément mais pas normalement.

II Propriétés de la convergence uniforme

II.1 Continuité

Théorème 19 : [Ramis, p.553]
Toute limite uniforme d'applications continues sur X est continue sur X.

Exemple 20 :
Avec la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple 3, on remarque que chaque f_n est continue sur $[0;1]$ mais que la limite ne l'est pas. Donc la convergence ne peut être uniforme.

Corollaire 21 : [Deschamps, p.521]
Si la série de fonctions $\sum f_n$ CVU sur X et que chaque f_n est continue, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X.

Le théorème précédent admet une réciproque partielle sous des hypothèses de monotonie, connue sous le nom de théorèmes de Dini :

Théorème 22 : Premier théorème de Dini [Ramis, p.553] :
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui CVS vers f qui est continue et que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur X.

Théorème 23 : Deuxième théorème de Dini [Ramis, p.553] :
Soit $I : [a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(a < b)$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions croissantes de I dans $\mathbb{R}$ et qui CVS vers f qui est continue, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur I.

Exemple 24 : [Ramis, p.554]
On considère $I = [0; 1]$ et la suite de fonctions :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ \forall x \in I,\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right) \end{cases}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ f_n(I) \subseteq I$ et $f_n' \geq 0$.
Donc par le deuxième théorème de Dini, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur I.

Théorème 25 : Théorème de la double limite [Deschamps, p.512] :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n finie en $a \in \overline{I}$, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la fonction f admet une limite en a et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Remarque 26 : [Deschamps, p.512]
L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle. En effet, si l'on reprend la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple 3, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to 1} f_n(x)\right) \neq \lim\limits_{x\to 1}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.

II.2 Intégrabilité

Dans toute cette sous-partie, on suppose que les f_n sont des fonctions définies sur I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues sur I.

Théorème 27 : [Deschamps, p.512]
On suppose que $I = [a; b]$.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f sur I, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 28 : [Deschamps, p.513]
Si l'on considère $I = [0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = n^3x^n(1-x)$ définie sur I et qui converge simplement vers la fonction nulle notée f, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = +\infty \neq \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Théorème 29 : [Deschamps, p.514]
On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I vers f.
Pour $a \in I$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ et Φ_n les applications définies sur I par :

$$\Phi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t \text{ et } \Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

La suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I vers a.

Corollaire 30 : [Deschamps, p.523]
Soit $a \in I$.
Si la série $\sum f_n$ CVU sur $I = [a; b]$, alors :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

II.3 Dérivabilité

Dans toute cette sous-partie, on suppose que les f_n sont des fonctions définies sur I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues sur I.

Théorème 31 : [Deschamps, p.514]
Supposons que les f_n soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers f et si la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I, alors :
$*$ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

$*$ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I.

L'hypothèse de convergence uniforme des dérivée est essentielle :

Exemple 32 : [Deschamps, p.514]
On considère pour tout $n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue. Cependant, cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque 33 : [Deschamps, p.514]
En appliquant le théorème 31 par récurrence, on en déduit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur I telle que pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ CVS et la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur tout segment de I, alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![0;p]\!]$:

$$\forall x \in I,\ f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Corollaire 34 : [Deschamps, p.525]
Supposons que les f_n soient de classe $\mathcal{C}^p$ sur I avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Si :
* Pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(k)}$ CVS sur I.
* La série $\sum f_n^{(p)}$ CVU sur tout segment de I.

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![0;p]\!]$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Exemple 35 : [Deschamps, p.525]
La fonction zêta $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1;+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$.

III Divers exemples

III.1 Séries entières

Définition 36 : Série entière [Deschamps, p.601] :
On appelle **série entière associée à** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum f_n$ où chaque $f_n : z \longmapsto a_n z^n$ est définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Lemme 37 : Lemme d'Abel [Deschamps, p.602] :
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq |z_0|$, la série $\sum a_n z_0^n$ est absolument convergente.

Définition 38 : Rayon de convergence [Deschamps, p.602] :
On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$, la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ et on la note R.

Proposition 39 : [Deschamps, p.603]
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.
* Si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
* Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Proposition 40 : Règle de d'Alembert [Deschamps, p.606] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain n_0 assez grand et que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ possède une limite ℓ, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple 41 : [Deschamps, p.604]
La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Proposition 42 : Règle d'Hadamard [Ramis, p.577] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Le rayon de convergence de cette série entière est donné par $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Exemple 43 : [Ramis, p.577]
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 + (-1)^n$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$, donc par la règle d'Hadamard, on a $R = 1$.

Théorème 44 : [Deschamps, p.610]
La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0,\rho)$ où $\rho \in [0;R[$.

Développement 1 : [cf. GOURDON]

Théorème 45 : Théorème d'Abel angulaire [Gourdon, p.263 + 264] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge et de somme notée f sur le disque unité.
Si on fixe $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et que l'on pose :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0;\theta_0] \text{ tq } z = 1 - \rho e^{i\theta}\right\}$$

alors on a : $\lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 46 : [Gourdon, p.264]

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ et } \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Théorème 47 : Théorème taubérien faible [Gourdon, p.264] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n})$ et s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$, alors $\sum a_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

III.2 Séries de Fourier

Dans toute cette sous-partie, on considère f une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0; 2\pi]$.

Définition 48 : Coefficient de Fourier [El Amrani, p.173] :
On considère $n \in \mathbb{Z}$.
On appelle **n-ième coefficient de Fourier de f** (noté c_n) le nombre complexe défini par :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Définition 49 : Série de Fourier [El Amrani, p.178] :
On appelle **série de Fourier de f** la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\cdot}$

Remarque 50 : [El Amrani, p.178 + 180]
On note S_N la somme partielle d'indice $N \in \mathbb{N}$ de la série de Fourier de f et $\sigma_n(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$ la N-ième somme partielle de Cesàro de la série de Fourier de f.

Théorème 51 : Théorème de Féjer [El Amrani, p.190] :
Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue (resp. dans L^p pour $p \in [1; +\infty[$) et 2π-périodique :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0 \quad \text{(respectivement } \lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0)$$

Corollaire 52 : [El Amrani, p.194]
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si la suite $(S_N(f)(x_0))_{N\in\mathbb{N}}$ converge de limite notée ℓ, alors on a $\ell = f(x_0)$.
De plus, si la suite $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(x)$.

Théorème 53 : Formule sommatoire de Poisson [Gourdon, p.284] :
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f(x)| < +\infty \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f'(x)| < +\infty$$

alors on a la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t\right)e^{2i\pi nx}$$

Exemple 54 : [Gourdon, p.284]
La formule sommatoire de Poisson donne une équation fonctionnelle pour la fonction thêta de Jacobi :
Pour tout $x > 0$, la fonction $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n x^2}$ vérifie $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$

III.3 Probabilités

III.3.1 Processus de Galton-Watson

Dans toute ce paragraphe, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi notée μ admettant une espérance notée m, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose que $p_0 \in]0; 1[$.

Définition 55 : Série génératrice [Chabanol, p.41] :
On appelle **série génératrice de X** la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de X. On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction la probabilité d'extinction à l'instant n, $P_{\text{ext}} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction de la population et G_n la fonction génératrice de Z_n.

Lemme 56 : [Gourdon, p.345]
* G est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0; 1]$.
* G est strictement croissante sur $[0; 1]$.
* G est strictement convexe sur $]0; 1]$ si, et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

Proposition 57 : [Gourdon, p.376]
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ ... \circ G$ (n fois), avec G la série génératrice de X.
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
$*$ De plus, on a : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.

Théorème 58 : [Gourdon, p.376]
$*$ P_{ext} est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur $]0;1]$.
$*$ Si $m \leq 1$ (cas sous-critique et critique), alors $P_{ext} = 1$.
$*$ Si $m > 1$ (cas super-critique), alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

III.3.2 Théorème central limite

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 59 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Définition 60 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\varphi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \end{array} \right.$$

Développement 2 : [cf. QUEFFELEC]

Lemme 61 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Théorème 62 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
$*$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
$*$ La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers φ_X.

Théorème 63 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Remarques sur la leçon

— Parler longuement des séries de fonctions n'est pas utile puisqu'il s'agit de reformulations de résultats sur les suites de fonctions mais appliquée aux sommes partielles.

— Beaucoup de résultats de la partie II peuvent être étendus ou démontrés simplement avec une hypothèse de convergence uniforme sur tout compact ou au voisinage de chaque point (mais pas tous !).

— Les résultats d'intégrabilité de la partie II ne s'énoncent que pour l'intégrale de Riemann même s'il est possible de parler des intégrales de Lebesgue qui sont plus intéressantes mais moins faciles d'accès...

— Il est également possible de faire d'autres applications sur les séries de fonctions holomorphes, les produits infinis ou encore de fonctions continues nulle part dérivables comme par exemple $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n t)}{2^n}$.

Liste des développements possibles

— Théorème d'Abel angulaire.

— Théorème de Féjer.

— Théorème de Lévy + TCL.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Jean-Pierre Ramis, *Mathématiques, Tout-en-un pour la licence 2*.

— Bertrand Hauchecorne, *Les contre exemples en mathématiques*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.