Leçon 234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation de l'espace L^1 (voire L^p) associé à la mesure de Lebesgue (supposée construite) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, voire d'autres mesures.
Les grands théorèmes de la théorie (permutation limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables et la proposition systématique d'exemples d'application significatifs doit enrichir ce déroulé. Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.
Les candidates et candidats solides pourront s'intéresser à la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, la dualité entre L^p $(1 \leq p < +\infty)$, les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$, l'étude des parties compactes de L^p, etc.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 234 intitulée : "Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.". La théorie de Lebesgue a permis de s'abstenir de nombreuses conditions jusqu'alors nécessaires pour définir l'intégrale d'une fonction. Si Cauchy puis Riemann ont défini les intégrales de fonctions continues et d'autres classes de fonctions régulières, c'est bien Lebesgue qui avec la notion de mesure a permis une nouvelle approche de l'intégrale, avec une intégration en tranches horizontales et non plus verticales. Cette nouvelle théorie s'étend a des espaces de fonctions extrêmement riches, qui sont des espaces de Banach. De plus, les théorèmes d'interversion de symboles ne nécessitent que peu d'hypothèses. Le but de cette leçon sera de parler de l'intégrale de Lebesgue ainsi que des espaces L^p.
Dans un premier temps, on s'intéresse à l'intégrale de Lebesgue. Dans un premier point on définit l'intégrale de Lebesgue. Le but est de construire l'intégrale d'une fonction étagée positive, puis mesurable positive et enfin mesurable. Pour cela, on introduit tout d'abord la notion de fonction étagée puis le théorème d'approximation des fonctions mesurables positives par les fonctions étagées. On poursuit ensuite avec la définition de l'intégrale d'une fonction étagée positive puis d'une intégrale d'une fonction mesurable positive. On continue avec le théorème de Beppo Levi qui montre l'efficacité de l'intégrale de Lebesgue comparée à celle de Riemann. On termine ce premier point par la définition de l'intégrale d'une fonction mesurable ainsi qu'une comparaison entre l'intégrale de Riemann et de Lebesgue sur un segment fermé de $\mathbb{R}$.
Dans un deuxième point on s'intéresse désormais aux théorèmes principaux qui font la force de l'intégrale de Lebesgue de par le peu d'hypothèses nécessaires. Tout d'abord on énonce le lemme de Fatou ainsi que le théorème de convergence dominée qui est très utilisé dans la pratique. On poursuit ensuite avec les intégrales à paramètre où l'on énonce les théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe intégrale ainsi qu'une application à la fonction Gamma d'Euler et enfin le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale avec encore une fois une application à la fonction Gamma d'Euler. On termine cette sous-partie ainsi que cette partie avec les théorèmes de Fubini en théorème 26 et 27 qui sont également très utilisés en pratique car ils permettent de ramener le calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}^n$ au calcul de plusieurs intégrales sur $\mathbb{R}$.
Dans un deuxième point, on s'intéresse désormais aux espaces L^p avec tout d'abord leur construction ainsi que quelques propriétés. On définit ainsi les espaces $\mathcal{L}^p$ puis les espaces L^p pour pouvoir disposer d'une norme. On finit ce point par énoncer l'inégalité de Hölder et de Minkowski ainsi que le théorème de Riesz-Fischer qui fait jouir les espaces L^p d'une structure d'espace de Banach ainsi que le cas de L^2 qui lui est même un espace de Hilbert ! On continue dans un deuxième point sur la convolution où les théorèmes de Fubini trouvent toute leur importance. On énonce ainsi la définition du produit de convolution puis on étudie la convolution dans le cas de plusieurs espaces puis par rapport à la dérivation. On termine cette partie avec un dernier point autour des approximations de l'unité en commençant par donner la définition d'une approximation de l'unité ainsi que des exemples importants puis on conclut sur la

notion de suite régularisante ainsi qu'une application du théorème 39 avec le théorème 44.
Enfin, on consacre une dernière partie aux applications avec tout d'abord la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier dans le cadre $L^1(\mathbb{R})$ avant d'enchaîner sur le lemme de Riemann-Lebesgue qui est une application du théorème 21 avant de finir en montrant que la transformée de Fourier est une application linéaire, continue et injective. On donne une deuxième application dans le cadre des probabilités. On rappelle ainsi la définition de la convergence en loi ainsi que de la fonction caractéristique et on énonce le théorème de Lévy qui ramène un problème de convergence en loi à un problème de convergence simple et on en donne une application avec le théorème central-limite. Enfin, on termine cette leçon avec les polynômes orthogonaux. On commence par énoncer la définition d'une fonction poids avant de s'intéresser à l'espace $L^2(I,\rho)$ qui est un espace de Hilbert et on conclut en donnant des exemples de fonctions poids ainsi que des polynômes unitaires orthogonaux et une condition suffisante pour que ces polynômes forment une base hilbertienne de l'espace $L^2(I,\rho)$.

Plan général

Cours détaillé

I Intégrale de Lebesgue

I.1 Définition de l'intégrale de Lebesgue

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure.

Définition 1 : Fonction étagée [El Amrani, p.404] :
On considère une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est une **fonction étagée** lorsqu'elle est de la forme $\sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{A_k}$ (où $c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$, $c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$ et $\{A_1,...,A_n\}$ une partition mesurable de l'ensemble X).

Théorème 2 : [El Amrani, p.405]
Soit $f : X \longrightarrow [0;+\infty]$ une fonction mesurable.
Il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables étagées positives telles que :
$$\forall x \in X,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Nous utiliserons désormais les conventions suivantes :
$$0\times(\pm\infty) = (\pm\infty)\times 0 = 0,\ \begin{cases} (+\infty)+x & = x+(+\infty) = +\infty \quad \text{pour } x\neq -\infty \\ (-\infty)+x & = x+(-\infty) = -\infty \quad \text{pour } x \neq +\infty \end{cases}$$
$$\text{Et pour tout réel } x \text{ non nul },\ \begin{cases} x\times(+\infty) & = (+\infty)\times x & = \begin{cases} +\infty & \text{si } x>0 \\ -\infty & \text{si } x<0 \end{cases} \\ x\times(-\infty) & = (-\infty)\times x & = \begin{cases} -\infty & \text{si } x>0 \\ +\infty & \text{si } x<0 \end{cases} \end{cases}$$

Définition 3 : Intégrale d'une fonction étagée positive [El Amrani, p.405] :
On considère une fonction $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{A_k}$ étagée positive sur X.
On appelle **intégrale de f sur X par rapport à la mesure** μ la quantité :
$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$$

Proposition 4 :
Soient f et g deux fonctions étagées positives sur X.
Pour tout $\lambda \geq 0$, on a :
$$\int_X \lambda f + g\mathrm{d}\mu = \lambda\int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu$$
De plus, si $f\geq g$, alors $\int_X f\mathrm{d}\mu \geq \int_X g\mathrm{d}\mu$.

Définition 5 : Intégrale d'une fonction mesurable positive [El Amrani, p.405] :
Soient $f : X \longrightarrow [0;+\infty]$ une fonction mesurable positive sur X et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant simplement vers f sur X.
On appelle **intégrale de f sur X par rapport à la mesure μ**, la quantité :

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$$

Remarque 6 : [El Amrani, p.405]
La définition précédente ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. La quantité $\int_X f\mathrm{d}\mu$ est donc intrinsèque.

Théorème 7 : Théorème de Beppo Levi [El Amrani, p.405] :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions mesurables positives.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers une fonction f, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu$$

Proposition 8 : [El Amrani, p.407]
Soit f une fonction mesurable positive.

$$\left(\int_X f\mathrm{d}\mu = 0\right) \Longleftrightarrow \left(f \underset{\mu-p.p.}{=} 0\right)$$

Proposition 9 : [El Amrani, p.407]
Soient f et g deux fonctions mesurables positives.
Si $f \underset{\mu-p.p.}{=} g$, alors $\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X g\mathrm{d}\mu$.

Proposition 10 : Inégalité de Markov [Faraut, p.16] :
Soit f une fonction mesurable positive.
Pour tout $\alpha > 0$, $\mu(\{x\in X \text{ tq } f(x)\geq\alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f\mathrm{d}\mu$.

On pose désormais les fonctions $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$.

Définition 11 : Intégrale d'une fonction mesurable [El Amrani, p.406] :
On considère une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est **μ-intégrable** lorsqu'elle est mesurable et que $\int_X |f|\mathrm{d}\mu < +\infty$. On pose alors :

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f^+\mathrm{d}\mu - \int_X f^-\mathrm{d}\mu$$

Remarque 12 : [El Amrani, p.406]
Si f est à valeurs complexes, alors l'intégrale de $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$ est définie par : $\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X \mathrm{Re}(f)\mathrm{d}\mu + i\int_X \mathrm{Im}(f)\mathrm{d}\mu$.

Théorème 13 :
L'espace des fonctions μ-mesurables telles que $\int_X |f|\mathrm{d}\mu < +\infty$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \longmapsto \int_X f\mathrm{d}\mu$ est une forme linéaire positive.

Théorème 14 : [El Amrani, p.416]
Toute fonction Riemann-intégrable sur un segment fermé de $\mathbb{R}$ est Lebesgue intégrable sur ce même segment et les deux intégrales coïncident.

Remarque 15 : [El Amrani, p.416]
Le théorème précédent s'étend aux intégrales de Riemann impropres, mais à la condition qu'elles soient Riemann-absoluement-convergentes.

Exemple 16 :
$*$ La fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est Riemann-intégrable sur $]0;+\infty[$ mais pas Lebesgue intégrable (car non absolument convergente).
$*$ La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0;1]}$ est Lebesgue-intégrale sur $[0;1]$ mais pas Riemann-intégrable sur $[0;1]$.

I.2 Théorèmes principaux

I.2.1 Lemme de Fatou

Dans tout ce paragraphe, on considère $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré.

Théorème 17 : Lemme de Fatou [El Amrani, p.407] :
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0;+\infty]$, alors :

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$$

Exemple 18 : [Faraut, p.11]
L'inégalité du lemme de Fatou peut être stricte comme le montre l'exemple suivant :
On considère $X =]0;+\infty[$ et $f_n : x \longmapsto ne^{-nx}$.
On a $\int_X f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ mais pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Théorème 19 : Théorème de convergence dominée [El Amrani, p.408] :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables sur X convergeant μ-presque partout vers une fonction f.
S'il existe une fonction g μ-intégrable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \underset{\mu-p.p.}{\leq} g$, alors f est μ-intégrable et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

Corollaire 20 : [El Amrani, p.410]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables sur X telle que la série $\sum f_n$ converge μ-presque partout, sa somme étant égale μ-presque partout à une fonction f mesurable.
S'il existe une fonction g μ-intégrable telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{k} f_n\right| \leq g$, alors la fonction f est μ-intégrable et on a : $\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_X f_n \mathrm{d}\mu\right)$.

I.2.2 Intégrales à paramètre

Dans tout ce paragraphe, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 21 : Théorème de continuité sous le signe $\int$ [El Amrani, p.410] :
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
$*$ Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable.
$*$ Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
$*$ Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$.
alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue sur I.

Théorème 22 : Théorème de dérivation sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
$*$ Pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-mesurable.
$*$ Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.
$*$ Il existe une fonction μ-intégrable positive g sur X telle que pour presque tout couple $(x,t) \in X \times I$ pour lequel $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.
alors la fonction $F : t \longmapsto \int_X f(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur I, de dérivée la fonction $F' : t \longmapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}\mu(x)$.

Exemple 23 : [El Amrani, p.411]
La fonction gamma d'Euler donnée par : $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}(\ln(x))^k \mathrm{d}x$$

Théorème 24 : Théorème d'holomorphie sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $g : X \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
$*$ Pour presque tout $z \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto g(x,z)$ est intégrable.
$*$ Pour presque tout $x \in X$, la fonction $z \longmapsto g(x,z)$ est holomorphe dans Ω.
$*$ Il existe une fonction intégrable positive g telle que pour presque tout couple $(x,z) \in X \times \Omega$, on a $|g(x,z)| \leq g(x)$.
alors la fonction $G : z \longmapsto \int_X g(x,z)\mathrm{d}x$ est analytique dans Ω, et de plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(x,z)\mathrm{d}\mu(x)$.

Exemple 25 : [El Amrani, p.412]
La fonction Γ donnée, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\mathrm{d}x$ est analytique dans le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

I.2.3 Théorèmes de Fubini

Dans toute ce paragraphe, on considère deux espaces mesurés $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ avec ν et μ supposées σ-finies.

Théorème 26 : Théorème de Fubini-Tonelli [El Amrani, p.422] :
Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable.
Les fonctions partout définies par $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables (pour les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement) et on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Théorème 27 : Théorème de Fubini [El Amrani, p.422] :
Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure $\mu \otimes \nu$.
$*$ Pour presque-tout $x \in X$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est ν-intégrable.
$*$ La fonction définie presque-partout par $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ est μ-intégrable.
De plus, on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Exemple 28 : [El Amrani, p.423]
$*$ À l'aide de ce théorème ainsi que d'un changement de variables, on obtient la formule fondamentale suivante : $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}\lambda^{(2)}(x,y) = \pi$.
$*$ Cependant le théorème de Fubini ne s'applique pas à l'intégrale suivante (car la fonction considérée n'est pas intégrable) : $\int_{[0;1]^2} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}\lambda^{(2)}(x,y)$.

II Les espaces L^p

II.1 Construction et propriétés

Dans toute cette sous-partie, on considère un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Définition 29 : Espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$ [El Amrani, p.417] :
On considère $p \in [1; +\infty[$.
On appelle :
$*$ **espace** $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty$.
$*$ **espace** $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que :

$$\|f\|_{\infty,ess} = \{\inf M > 0 \text{ tq } \mu(\{|f| > M\}) = 0\} < +\infty$$

Remarque 30 : [El Amrani, p.417]
L'espace $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel mais l'application $f \longmapsto \|f\|_p$ n'est qu'une semi-norme dessus... En effet, $\|f\|_p = 0$ n'entraîne pas que $f = 0$ mais seulement que $f \underset{\mu-p.p.}{=} 0$!

Définition 31 : Espaces L^p [El Amrani, p.417] :
On considère $p \in [1; +\infty]$.
On appelle **espace** L^p l'espace $\mathcal{L}^p$ quotienté par la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu),\ (f \sim g) \iff (f \underset{\mu-p.p.}{=} g)$$

Proposition 32 : Inégalités de Hölder et de Minkowski [Faraut, p.42] :
Soient $p \in [1; +\infty[$ et q sont exposant conjugué.
$*$ Pour tout $(f, g) \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \times L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
$*$ Pour toutes fonctions $f, g \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, on a :

$$\left(\int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec cas d'égalité lorsque $p = 1$ et f et g presque-partout positivement liées.

Corollaire 33 : [El Amrani, p.417]
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout $p \in [1; +\infty]$, $\left(L^p(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Théorème 34 : Théorème de Riesz-Fischer : [Faraut, p.46 + 47]
Pour $p \in [1; +\infty]$, l'espace $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Corollaire 35 : [Faraut, p.49]
L'espace $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$<\cdot;\cdot>: \left| \begin{array}{ccc} \left(L^2(X, \mathcal{F}, \mu)\right)^2 & \longrightarrow & L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \\ (f, g) & \longmapsto & \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x) \end{array} \right.$$

II.2 Convolution

Définition 36 : Produit de convolution [El Amrani, p.75] :
On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont **convolables** lorsque, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors le **produit de convolution de** f **et de** g par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f * g)(x) = \int_\mathbb{R} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 37 : [El Amrani, p.77]
Soient f et g deux fonctions convolables.
On a alors l'inclusion : $\mathrm{supp}(f * g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$.

Théorème 38 : [El Amrani, p.78 + 80 + 81]
Soit $p \in [1; +\infty[$ et q sont exposant conjugué.
$*$ Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
$*$ Pour tous $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
$*$ Pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, $f * g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
De plus $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et si $p \neq 1$, alors $f * g \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Théorème 39 : [El Amrani, p.90]
Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact.
On a $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\ell \in [\![0; k]\!]$, $\frac{\partial^\ell (f*g)}{\partial x^\ell}(x) = \left(\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell} * g\right)(x)$.

II.3 Approximation de l'unité

Définition 40 : Approximation de l'unité [El Amrani, p.86] :
On appelle **approximation de l'unité** dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$*$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \geq 0$ et $\int_\mathbb{R} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 1$. $(*)$ $*$ $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{j\to+\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 41 : [El Amrani, p.86]
$*$ $\varphi_t(x) = \frac{1}{2t}e^{-\frac{|x|}{t}}$ (noyau de Laplace). $*$ $\varphi_t(x) = \frac{t}{\pi}\frac{1}{t^2+x^2}$ (noyau de Cauchy).
$*$ $\varphi_t(x) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2t^2}}$ (noyau de Gauss).

Remarque 42 : [El Amrani, p.93]
Pour toute fonction positive ρ sur $\mathbb{R}$, à support compact et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$, on peut associer le noyau $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Définition 43 : Suite régularisante [El Amrani, p.94] :
On appelle **suite régularisante de** $\mathbb{R}$ toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$ de la définition 19 et telle qu'il existe une autre suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0 telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{B}_o(0, \varepsilon_j)$.

Théorème 44 : [El Amrani, p.419]
Soit $p \in [1; +\infty[$.
L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

III Applications

III.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 45 : Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.109] :
On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On appelle **transformée de Fourier de** f l'application :

$$\widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Lemme 46 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.109] :
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 47 : [El Amrani, p.110]
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.

Corollaire 48 : [El Amrani, p.111]
La transformation de Fourier $\mathcal{F} : f \longmapsto \widehat{f}$ est une application linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 49 : [El Amrani, p.114]
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Définition 50 : Noyau de Gauss [El Amrani, p.86]
On appelle **noyau de Gauss**, l'application :

$$\varphi_t : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2t^2}} \end{array} \right.$$

Développement 1 : [cf. EL AMRANI]

Proposition 51 : [El Amrani, p.112]
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Lemme 52 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$$

Théorème 53 : [El Amrani, p.115]
La transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array} \right.$$

est une application injective.

III.2 Probabilités

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 54 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 55 : Fonction caractéristique :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\varphi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \end{array} \right.$$

Développement 2 : [cf. QUEFFELEC]

Lemme 56 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Théorème 57 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
$*$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
$*$ La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ_X.

Théorème 58 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

III.3 Polynômes orthogonaux

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a;b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 59 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur** I une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 60 : L'espace $L^2(I,\rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I,\rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 61 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I,\rho)$.

Théorème 62 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I,\rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ρ).

Exemple 63 : [El Amrani, p.41]
$*$ Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
$*$ Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
$*$ Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
$*$ Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Théorème 64 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Remarque 65 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0;+\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

Remarques sur la leçon

— On peut s'intéresser un peu plus dans cette leçon aux fonctions mesurables ainsi qu'aux mesures ou bien encore se concentrer d'avantage sur la définition de l'intégrale (intégrale de fonctions étagées puis de fonctions mesurables positives).

— Il est possible de parler des espaces ℓ^p comme applications des espaces L^p munis de la mesure de comptage et parler d'inclusions, de duals, de réflexivité, etc.

— On peut s'aventurer d'avantage dans la transformée de Fourier avec son étude sur $L^2(\mathbb{R})$ ou l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

— Il est possible de donner d'autres applications comme les polynômes orthogonaux ou encore les espaces de Bergman.

Liste des développements possibles

— Injectivité de la transformée de Fourier.

— Théorème de Lévy + TCL.

— Polynômes orthogonaux.

Bibliographie

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Jacques Faraut, *Calcul intégral*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.