

Leçon 266: Illustration de la notion d'indépendance en probabilités

Références: Chabanel, Aurouard 2, Barbe-Ledoux, Queffelec, Delmas (DEV 1)

I - Notion d'indépendance

- 1) Evénements indépendants
- 2) Vecteurs aléatoires indépendants et corrélation
- 3) Somme de deux variables aléatoires indépendantes

II - Application de l'indépendance aux convergences

- 1) Borel - Cantelli et convergence presque sûre
- 2) Loi forte des grands nombres
- 3) Théorème Central Limite

III - Exemples particuliers

- 1) Vecteurs Gaussiens
- 2) Processus de Galton-Watson

DEV 1: Indécomposabilité de la loi de Poisson

DEV 2: Lévy et TCA

Leçon 26: Illustration de la notion d'indépendance en probabilités

Tous les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (v.a.r) ou $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^+$)

I - Notion d'indépendance

1) Événements indépendants [CHA] [OVL] [BAR]

DEF 1: Soit $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \neq 0$. On définit la probabilité conditionnelle P_A par: $\forall B \in \mathcal{A}$, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

DEF 2: Soient $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. On dit que A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

REM 3: On a alors $P_A(B) = P(B)$.

DEF 4: Deux familles d'événements $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ sont indépendantes lorsque: $\forall (A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) \in \mathcal{A}^k$, $\forall (B_{j_1}, \dots, B_{j_l}) \in \mathcal{A}^l$, $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_l}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) P(B_{j_1}) \dots P(B_{j_l})$

REM 5: A et B sont indépendants si et seulement si $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ le sont.

EX 6: On jette deux dés, un bleu et un rouge. Les événements $A = \{\text{obtenir un nombre } \leq 4 \text{ avec le dé rouge}\}$ et $B = \{\text{obtenir 6 avec le dé bleu}\}$ sont indépendants.

DEF 7: Une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante lorsque pour tout $J \subset I$ fini, $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$

EX 8: Reprenons EX 6 avec $A = \{\text{le résultat du dé rouge est impair}\}$, $B = \{\text{le résultat du dé bleu est impair}\}$, $C = \{\text{la somme des deux dés est impair}\}$. A, B et C sont 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.

2) Vecteurs aléatoires indépendants et corrélation [BAR]

DEF 9: Une famille de v.a. $(X_i)_{i \in I}$ est (mutuellement) indépendante lorsque la famille des tribus engendrées par les X_i est (mutuellement) indépendante.

$\forall J \subset I$ fini, $\forall B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall i \in J$, $P(\bigcap_{i \in J} X_i \in B_j) = \prod_{i \in J} P(X_i \in B_j)$

PROP 10: Soit $(X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire. $(X_1, \dots, X_d)$ est indépendante (i.e. $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes) si et seulement si $P_{(X_1, \dots, X_d)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_d}$.

PROP 11: Soient X_1, X_2 deux v.a. et f, g bornées. Alors $f(X_1)$ et $g(X_2)$ sont indépendantes.

PROP 12: Une famille $(X_i)_{i \in I}$ est indépendante si et seulement si pour tout $J \subset I$ fini, pour toute famille de fonctions bornées telles que $f_j(x_j)$ soient intégrables $E[\prod_{j \in J} f_j(X_j)] = \prod_{j \in J} E[f_j(X_j)]$.

COR 13: X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$, $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$

COR 14: Si X_1 et X_2 admettent des densités et sont indépendantes, $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$, $f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$

Si (X_1, X_2) admet une densité produit de deux fonctions intégrables positives f_1 et f_2 i.e. $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$. Alors f_1 et f_2 sont, à un facteur positif près, les densités de X_1 et X_2 qui sont alors indépendantes.

PROP 15: Si X_1, X_2 sont discrètes réelles, on a (X_1, X_2) indépendant si et seulement si: $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2)$

PROP 16: $(X_1, \dots, X_n)$ est indépendant si et seulement si $\phi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \phi_{X_1}(t_1) \dots \phi_{X_n}(t_n) \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ où les ϕ_{X_i} sont les fonctions caractéristiques des X_i .

REM 17: Avec PROP 16, on observe que si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $E[X_1 \dots X_n] = E[X_1] \dots E[X_n]$.

DEF 18: Soient $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. On dit qu'elles sont non corrélées lorsque $E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = 0$ i.e. $E[XY] = E[X]E[Y]$. Le nombre $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ est appelé covariance de (X, Y) notée $\text{cov}(X, Y)$.

PROP 19: Si X, Y sont indépendantes, alors elles sont non corrélées et $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

REM 20: La réciproque est fautive: si $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et $Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ X et Y sont non corrélées mais pas indépendantes.

DEF 21: Le coefficient de corrélation des variables X et $Y \in \mathcal{L}^2$ est $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

PROP 22: On a: $\rho(X, Y) \in [-1; 1]$. Si $Y = aX + b$ ($a \neq 0$), $|\rho(X, Y)| = 1$.
Si $|\rho(X, Y)| = 1$, alors $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} - \rho(X, Y) \frac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)} = 0$

3) Somme de deux variables aléatoires indépendantes [BAP]

PROP 23: Si $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux non corrélées, on a:
 $P\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i])\right| \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \quad (t > 0)$

PROP 24: Soient X, Y deux v.a. n indépendantes. La loi de la somme $X+Y$ est donnée par le produit de convolution $P_X * P_Y$ défini, pour tout ϕ borélienne bornée, par:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi d(P_X * P_Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x+y) dP_Y(y) dP_X(x) \\ = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x+y) dP_X(x) dP_Y(y)$$

PROP 25: Si X et Y sont deux v.a. n indépendantes, on a:
 $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

APPLI 26: On obtient ainsi des résultats de stabilité des lois: pour X, Y indépendantes.

- Si $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$, $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$
- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$
- Si $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, $X+Y \sim \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$. [BAP]

PROP 27: Soient X, Y deux v.a. n indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X+Y \sim P(\lambda)$. Alors X et Y sont de loi de Poisson.

PROP 28: Si X et Y ont à densité, $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

II - Application de l'indépendance aux convergences

1) Borel-Cantelli et convergence presque sûre [CHA] [BAP]

DEF 29: On définit, pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$,
 $\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$ et $\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$

LEMME 30: (Borel-Cantelli 1) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Si $\sum P(A_n) < \infty$, $P(\limsup A_n) = 0$

EX 31: On jette une infinité de fois une pièce équilibrée. La probabilité de faire une infinité de fois 2 puis consécutifs est 1.

LEMME 31: (Borel-Cantelli 2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ indépendants. Si $\sum P(A_n) = +\infty$, $P(\limsup A_n) = 1$.

PROP 29: Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X des v.a. n .

(i) Si: $\forall \varepsilon > 0, \sum P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$
(ii) Si les (X_n) sont mutuellement indépendantes, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$ si et seulement si $\sum P(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

2) Loi forte des grands nombres [CHA]

THM 34: (Loi forte des grands nombres) Soit (X_n) une suite de v.a. n indépendantes, indépendantes (identiquement distribuées i.i.d.). Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E[X_1]$.

COR 35: Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{A_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} P(A_1)$.

EX 36: Si on lance une infinité de fois un dé et qu'on note A_n l'événement "Avoir 6 au n -ième lancer", alors la proportion de 6 obtenus au cours des n premiers lancers tend vers $P(A_1) = \frac{1}{6}$.

APPLI 37: Pour estimer la moyenne de X à partir d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de même loi que X , on utilise $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ qui est un estimateur sans biais fortement consistant de $E[X]$.

APPLI 38: (Monte-Carlo) on veut calculer de manière approchée $\int_0^1 f(x) dx$ avec f intégrable sur $[0, 1]$. Pour cela, on simule un échantillon i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$, et on remarque que $\int_0^1 f(x) dx = E[f(X_1)]$. La L.F.N nous permet d'approcher $\int_0^1 f(x) dx$ par $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$.

2) Théorème Central Limite [CHA]

LEMME 39: Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $3 \in \mathbb{R}$. Alors $(1 + \frac{3}{n})^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^3$.

THM 40: (Lévy) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. n et X une v.a. n . $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X$ ($\Leftrightarrow$) $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi_X(t)$ [BAP]

THM 41: Si $\phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \psi(t)$ avec ψ continue en 0, alors ψ est la fonction caractéristique d'une v.a. n X et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} X$.

THM 42: (Central Limite) Soit (X_n) une suite de v.a. n.i. indépendantes, identiquement distribuées de loi intégrable. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $m = E[X_1]$, $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X_1)}$. Alors:

$$\frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

COR 43: Avec les mêmes hypothèses, soit $z > 0$, alors:

$$P(m \in [\bar{X}_n - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

COR 44: Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de loi binomiale $B(n, p)$. Alors

$$Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

REMARQUE: Le COR 43 sert à proposer des intervalles de confiance.

III - Exemples particuliers

1) Vecteurs Gaussiens [CHA]

DEF 46: Pour X un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$, on définit son vecteur moyenne $E[X] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_d] \end{pmatrix}$ et sa matrice de covariance (ou de dispersion): $\Gamma = (\text{cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq d}$.

DEF 47: Un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ est dit gaussien lorsque toute combinaison linéaire de ses composantes est gaussienne (ou constante).

PROP 48: Les composantes d'un vecteur gaussien sont gaussiennes mais un vecteur dont toutes les composantes sont gaussiennes n'est pas forcément gaussien: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X = X$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ mais (X, Y) n'est pas gaussien.

THM 49: Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$, LASSE.

1) X est gaussien de moyenne $m \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance Γ .

2) $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\phi_X(u) = e^{i u^T m - \frac{1}{2} u^T \Gamma u}$.

PROP 50: Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ de moyenne m et de matrice de covariance Γ . Soit $A \in \mathbb{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Alors $AX + b$ est gaussien de moyenne $Am + b$ et de matrice de covariance $A\Gamma A^T$.

THM 51: Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$. LASSE:

- 1) $X_1, \dots, X_d$ sont mutuellement indépendantes
- 2) $X_1, \dots, X_d$ sont deux à deux indépendantes
- 3) la matrice de covariance Γ de X est diagonale.

THM 52: (TCL multivariée) Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ indépendants, de même loi et dans L^2 . On note $\mu = E[X_1]$, C la matrice de covariance de X_1 et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Alors $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} \mathcal{N}(0, C)$.

2) Processus de Galton - Watson [DELMAS]

DEF 53: Soit $(\xi_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d de loi intégrable. On note: $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(\xi_i^n = k)$; $E[\xi_i^n] = m$; $\sigma^2 = \text{Var}(\xi_i^n)$ et $G(s) = G_{\xi_i^n}(s)$ la fonction génératrice. On note $Z_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i^n$ ((Z_n) est appelé processus de Galton-Watson et modélise par exemple le nombre de personnes atteintes d'une maladie à l'instant n).

But: On s'intéresse à la probabilité d'extinction $\eta = P(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n = 0)$
 $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0)$

LEMME 54: 1) G est de classe C^2 convexe sur $[0,1]$

2) G est strictement croissante sur $]0,1[$

3) G est strictement convexe sur $]0,1[\Leftrightarrow p_0 p_1 < 1$.

LEMME 55: Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $G_n(s) = G(s)$ n fois et $E[Z_n] = m^n$.

THM 56: On suppose $p_0 \in]0,1[$.

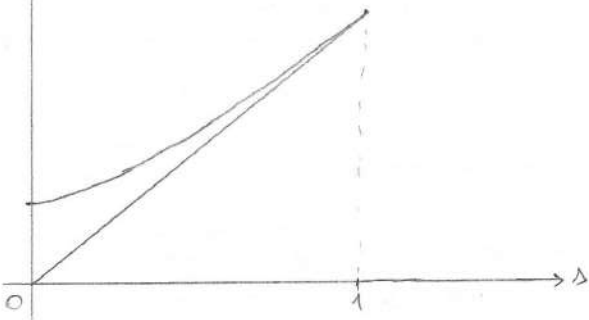
1) η est la plus petite solution positive de $G(s) = s$

2) Si $m \leq 1$, $\eta = 1$

3) Si $m > 1$, $\eta \in]0,1[$.

ANNEXE: Processus de balayage-Watson

$m \leq 1$: $\rho(s)$



$m > 1$:

