Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

Références : Chabanol, Duverand, 1 Delmas, Queffelec (Topologie)
(DEV 2) (DEV 1)

I - Notion de variable aléatoire discrète

1) Définitions et premières propriétés
2) Lois discrètes usuelles
3) Autour de la notion d'indépendance

II - Moments d'une variable aléatoire discrète

1) Espérance, variance, Théorème de transfert
2) Fonctions génératrices
3) Processus de Galton-Watson

III - Théorèmes limites

1) Convergence en loi, caractérisation
2) Loi forte des grands nombres et Théorème central limite

DEV 1 : Indécomposabilité de la loi de Poisson

DEV 2 : Processus de Galton-Watson.

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un ensemble mesurable

I - Notion de variables aléatoires discrètes

1) Définitions et premières propriétés [CHA]

DEF 1 : Une variable aléatoire est une application mesurable $X : \Omega \to E$. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (v.a.r).

REM 2 : Une variable aléatoire n'est ni une variable ni aléatoire

DEF 3 : La loi d'une v.a $X : \Omega \to E$ est la mesure-image de P par X. C'est la probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ notée P_X définie par :
$\forall B \in \mathcal{E}, P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\})$.

DEF 4 : Lorsque E est au plus dénombrable, on parle de variable aléatoire discrète. Dans ce cas, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$.

PROP 5 : La loi d'une v.a discrète est donnée par $P_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$ où $p_x = P(X = x)$.

EX 6 :
- Si on lance deux dés, on définit la v.a égale à la somme des résultats des dés : $X((i,j)) = i+j$ définie sur $[\![1;6]\!]^2$ à valeurs dans $[\![2;12]\!]$. On a $p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$; $p_3 = p_{11} = \frac{2}{36}$; $p_4 = p_{10} = \frac{3}{36}$; $p_5 = p_9 = \frac{4}{36}$; $p_6 = p_8 = \frac{5}{36}$; $p_7 = \frac{6}{36}$.
- Si on lance une pièce une infinité de fois, on peut définir une v.a Y donnant l'instant du premier pile.

DEF 7 : Pour X une v.a.r, on définit sa fonction de répartition $F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto P(X \leq t) \in [0,1]$. Si X est discrète, F_X est en escalier.

2) Lois discrètes usuelles [OUV 1]

REM 8 : Un tableau des lois discrètes usuelles ainsi que leur contexte d'apparition est donnée en annexe.

PROP 9 : La loi géométrique est l'unique loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (non triviale) qui est sans mémoire i.e :
$\forall k, l \in \mathbb{N}^*, P(X > k+l \mid X > l) = P(X > k)$

REM 10 : Dans le deuxième point de EX 6, si la pièce est non truquée, Y suit la loi $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

3) Autour de la notion d'indépendance [OUV 1]

DEF 11 : Deux évènements $A, B \in \mathcal{A}^2$ sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements sont dits indépendants lorsque pour tout $J \subset I$ finie : $P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$. On dit aussi indépendants dans leur ensemble.

REM 12 : Si n évènements sont indépendants dans leur ensemble ils le sont 2 à 2 mais la réciproque est fausse en général.

DEF 13 : Deux v.a $X_1 : \Omega \to (E_1, \mathcal{E}_1)$ et $X_2 : \Omega \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ sont dites indépendantes lorsque pour tout $A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2$, $(X_1 \in A_1)$ et $(X_2 \in A_2)$ sont indépendants.

PROP 14 : Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de v.a discrètes. Elles sont indépendantes, ssi et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$.

PROP 15 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de v.a indépendantes et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de v.a de $(E_i, \mathcal{E}_i)$ dans $(F_i, \mathcal{F}_i)$. Alors les v.a $(f_i(X_i))_{i \in I}$ sont encore indépendantes.

EX 16 : Si X_1, X_2, X_3, X_4 sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors $X_1 + X_2$ et $X_3 - X_4$ le sont aussi.

PROP 17 : Soit (X_1, X_2) deux v.a discrètes indépendantes
$\forall x \in \mathbb{Z}$, $P(X_1 + X_2 = x) = \sum_{x_1 \in E} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x - x_1)$

DEF 18 : On dit que la loi de probabilité discrète obtenue à partir de P_{X_1} et P_{X_2} est le produit de convolution de P_{X_1} et P_{X_2}. On la note $P_{X_1} * P_{X_2}$

EX 19 : Soient $X, Y \sim \mathcal{U}([\![0;n]\!])$ indépendantes, $Z = X + Y$. Z suit la loi triangle $P(Z = k) = \frac{k+1}{(n+1)^2} \mathbb{1}_{[\![0;n]\!]}(k) + \frac{2n-k+1}{(n+1)^2} \mathbb{1}_{[\![n;2n]\!]}(k)$.
- $\mathcal{B}(n_1, p) * \mathcal{B}(n_2, p) = \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

II - Moments d'une variable aléatoire discrète

1) Espérance, variance, formule de transfert [OUV 1]

DEF 20 : Soit X une v.a.r discrète. Si $\sum |x| P(X = x) < \infty$, on dit que X possède une moyenne et on note $E[X] = \sum_{x \in E} x P(X = x)$. On l'appelle espérance ou moyenne de X.

THM 21 (Transfert) : Soit X une v.a discrète à valeurs dans E et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors $Y = f(X) = f \circ X$ est une v.a discrète réelle. Y admet une moyenne ssi et seulement ssi $\sum_{x \in E} |f(x)| P(X=x) < \infty$. Dans ce cas, $E[f(X)] = \sum_{x \in E} f(x) P(X=x)$.

PROP 22 : L'espérance est linéaire. $|X| \leq M$ ($M \in \mathbb{R}^+$) $\Rightarrow E[X]$ existe. $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$. Si $E[X] = 0$, $X = 0$ p.s et $|E[X]| \leq E[|X|]$.

EX 23 : Si $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$, $E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ (moyenne arithmétique)

DEF 24 : Soit $p \geq 1$. On dit que X admet un moment d'ordre p lorsque $E[|X|^p] < \infty$. On appelle moment d'ordre p de X le nombre $E[X^p]$.

PROP 25 : Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $E[|X|^p] < \infty$ et $E[|Y|^q] < \infty$, on a $E[|XY|] \leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} E[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}$

DEF 26 : Si X admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de X le nombre $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$. On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

REM 27 : Par la formule de transfert, $Var(X) = \sum_{x \in E} (x - E[X])^2 \mathbb{P}(X=x)$

REM 28 : $Var(X)$ représente la dispersion de X autour de la moyenne, l'écart-type permet d'obtenir une quantité de même dimension que X.

PROP 29 : Si $E[|X|^2] < \infty$, on a : $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$ et $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$.

DEF 30 : Soient X, Y admettant un moment d'ordre 2. On définit la covariance de X et Y par $cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

PROP 31 : $cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)$.

EX 32 : Soit F_n la v.a comptant le nombre de points fixes de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors $E[F_n] = Var(F_n) = 1$.

PROP 33 : Si X et Y sont indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$ mais la réciproque est fausse en général.

PROP 34 (Markov) : Si $E[|X|] < \infty$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,
$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X|]}{\varepsilon}$.

PROP 35 (Bienaymé - Tchebychev) : Si $E[|X|^2] < \infty$, on a :
$\mathbb{P}(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

REM 36 : Cette inégalité est utile pour démontrer des convergences

2) Fonctions génératrices [OUV1] [CHA] On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{N}$

PROP 37 : Pour tout $s \in [-1;1]$, s^X admet un moment d'ordre 1.

DEF 38 : Lorsque cette quantité existe, on note $G_X(s) = E[s^X]$ et on l'appelle fonction génératrice de X.

PROP 39 : En notant $p_n = \mathbb{P}(X=n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :
$\forall s \in [-1;1], |G_X(s)| \leq 1$ et $G_X(1) = 1$.
$\forall s \in [-1;1], G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n$.
G_X est continue sur $[-1;1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.
G_X caractérise la loi de X : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

EX 40 : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $G_X(s) = (ps + (1-p))^n$
• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(s) = \exp(\lambda(s-1))$.

PROP 41 : Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

APPLI 42 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ et X, Y sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

EXEV 1

THM 43 : Soient X, Y deux v.a indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X et Y sont de loi de Poisson.

PROP 44 : G_X est m fois dérivable à gauche en 1 si et seulement si X a un moment d'ordre m et on a alors
$G_X^{(m)}(1) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) \mathbb{P}(X=k)$
En particulier $G_X'(1) = E[X]$ et $G_X''(1) = E[X^2] - E[X]$.
De plus, $Var(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$

REM 45 : Les fonctions génératrices sont utiles en dénombrement par exemple pour compter le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$.

THM 46 : Soit (X_n) indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit N une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_i. On pose $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Alors $G_{S_N}(s) = G_N \circ G_{X_1}(s)$

EX 47 : Si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et si les (X_n) suivent des lois de Bernoulli de paramètre p. On a $G_S(s) = \exp(\lambda(-p+ps)) = \exp(\lambda p(s-1))$
Donc $G \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

3) Processus de Galton-Watson [DEHMAS]

DEF 48: Soit $(\xi_i^n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a i.i.d de carré intégrable. On note : $\forall k\in\mathbb{N}$, $p_k = P(\xi_i^n = k)$, $m = E[\xi_i^1]$, $\sigma^2 = Var(\xi_i^n)$ et $G(s) = G_{\xi_i^1}(s)$ pour $s\in[0;1]$. On note $Z_0 = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n$. (Z_n) est appelé processus de branchement de Galton-Watson et modélise par exemple le nombre de personnes atteintes d'une maladie à l'instant n.

But: On s'intéresse à la probabilité d'extinction $\eta = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(Z_n=0)) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n=0) = \lim_{n\to+\infty} G_{Z_n}(0)$ DEV 2

LEMME 49: 1) G est de classe $\mathcal{C}^2$ convexe sur $[0;1]$.
2) G est strictement croissante sur $]0;1]$.
3) G est strictement convexe $\Leftrightarrow p_0+p_1<1$.

LEMME 50: Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $G_n(s) = \underbrace{G\circ\cdots\circ G}_{n \text{ fois}}(s)$ où $G_n = G_{Z_n}$.
De plus, $E[Z_n] = m^n$.

THM 51: On suppose $p_0\in]0;1[$.
1) η est la plus petite solution positive de l'équation $G(s)=s$.
2) Si $m\leq 1$, $\eta = 1$
3) Si $m>1$, $\eta\in]0;1[$.

REM 52: On donne les représentations graphiques des différents cas en Annexe.

III - Théorèmes limite

1) Convergence en loi, caractérisation [GTM]

DEF 53: On dit que (X_n) converge en loi vers X (X est une v.a.r et on note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque : $\forall \varphi\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $E[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[\varphi(X)]$.

THM 54: La suite (X_n) converge en loi vers X si et seulement si $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(t)$ en tout point t de continuité de F_X.

PROP 55: Si X_n et X sont discrètes (à valeurs dans $\mathbb{N}$), $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}$, $P(X_n=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(X=k)$.

EX 56: La v.a (f_n) définie en EX 32 converge en loi vers $F\sim\mathcal{P}(1)$.

PROP 57: Si X_n et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow G_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G_X(s)$ pour tout $s\in[0;1]$.

EX 58: Soit (S_n) une suite de v.a de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p_n)$ avec $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$. Alors $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} S$ où $S\sim\mathcal{P}(\lambda)$.

2) Loi forte des grands nombres et théorème Central limite

THM 59: (Loi forte des grands nombres) Soit (X_n) une suite de v.a intégrables i.i.d. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E[X_1]$.

COR 60: Soit (A_n) une suite d'événements indépendants de même probabilité. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} P(A_1)$.

EX 61: Si on lance un dé une infinité de fois et qu'on note A_n l'événement "Avoir 6 au n-ième lancer", alors la proportion de 6 obtenus au cours des n premiers lancers tend vers $\frac{1}{6}$.

LEMME 62: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall f\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[f(X)]$ (Levy)

THM 63: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X(t)$ $\forall t\in\mathbb{R}$

THM 64: (Central limite) Soit (X_n) une suite de v.a de carré intégrable i.i.d. Alors, si $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}S_n$,
$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z$ où $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$ avec $m = E[X_1]$, $\sigma = \sqrt{Var(X_1)}$ (moyenne logique)

COR 65: Soit (S_n) une suite de v.a de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Alors
$Y_n := \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z$ où $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$

COR 66: Pour $a>0$, avec les mêmes hypothèses que THM 64 :
$P\left(m\in\left[\overline{X_n} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

REM 67: Ce corollaire permet de construire des intervalles de confiance.

APPLI 68: En considérant une suite de v.a indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, on peut montrer que :
$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

ANNEXE 1 : Lois discrètes usuelles

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ $0<p<1$ $X \sim \mathcal{B}(1,p)$

$P(X=1)=p$; $P(X=0)=1-p$ | $E[X]=p$ | $Var(X)=p(1-p)$

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire avec 2 résultats possibles, appelées succès et échec. La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ est la loi de la v.a associée à une épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $0<p<1$

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $E[X]=np$ | $Var(X)=np(1-p)$

La loi du nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ $\mathcal{G}(p)$ $0<p<1$

$P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$ | $E[X]=\frac{1}{p}$ | $Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$

Loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

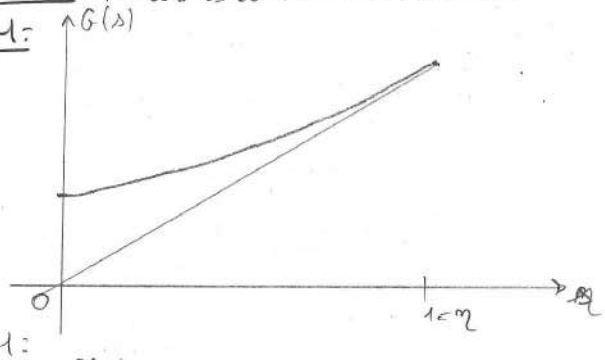
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda>0$ sur $\mathbb{N}$

$P(X=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ | $E[X]=\lambda$ | $Var(X)=\lambda$

Intervient dans la modélisation de phénomènes de comptage : nombre d'arrivées à un guichet, le nombre de gouttes de pluie sur une surface donnée ...

ANNEXE 2 : Processus de Galton-Watson

$m \leq 1$:



$m > 1$: