

Leçon n°262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications

Références : Chabrand, Ouversad, Borlé-Ledoux, Hauckecorne

I - Modes de convergences d'une suite de variables aléatoires

- 1) Convergence presque sûre
- 2) Convergence dans L^p
- 3) Convergence en probabilités
- 4) Convergence en loi

II - Théorèmes et propriétés de convergence

- 1) Caractérisations de la convergence en loi
- 2) Liens entre les convergences

III - Théorèmes limites

- 1) Loi forte des grands nombres
- 2) Théorème Central Limite

DEV 1 : Borel - Cantelli et CL p.s

DEV 2 : Lévy + TCL

Leçon 26.2: Convergences d'une suite de variables aléatoires

Théorèmes limites. Exemples et applications

Tous les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Soit (X_n) une suite de v.a. et X une v.a.

I - Modes de convergences d'une suite de variables aléatoires

1) Convergence presque sûre [CHA] [OUV] [BAP]

DEF 1: On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ lorsque $P(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\}) = 1$

REM 1: Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, alors X est P.p.s. unique. DEF 1

LEMME 3: (Borel-Cantelli 1) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. On note $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty$, alors $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$

LEMME 4: (Borel-Cantelli 2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \infty$, alors $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$

THM 5: Si on a: $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, la suite (X_n) converge presque sûrement vers X .

De plus, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante, et si $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$, on a $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$

PROP 6: $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P(\liminf_{n \rightarrow \infty} \{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 1$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| < \varepsilon\}) = 1$

où $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

EX 7: Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Soit $U_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} X_i$. Alors, $U_n \xrightarrow{p.s.} U$ où U est une v.a. à valeurs dans $[0; 1]$.

PROP 8: Soit (X_n) une suite de v.a. tel que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Alors $f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X)$.

PROP 9: Soient $(X_n), (Y_n)$ deux suites de v.a. telles que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$. Alors $X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y$ et $X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} X Y$

2) Convergence dans L^p [CHA] Soit $p \geq 1$

DEF 10: On dit que (X_n) converge dans L^p (ou en moyenne d'ordre p) vers X lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^p] = 0$.

THM 11: (Riesz-Thorin) Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, il existe une sous-suite de (X_n) qui converge p.s. vers X .

PROP 12: Soit (X_n) une suite de v.a. de carré intégrable définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = 0$, alors $X_n \xrightarrow{L^2} a$.

PROP 13: Soient X_n, Y_n deux suites de v.a. telles que $X_n \xrightarrow{L^p} X$ et $Y_n \xrightarrow{L^p} Y$. Alors, $X_n + Y_n \xrightarrow{L^p} X + Y$.

3) Convergence en probabilités [CHA]

DEF 14: On dit que (X_n) converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{P} X$ lorsque: $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

PROP 15: Sous les mêmes hypothèses que PROP 12, on a aussi $X_n \xrightarrow{P} X$.

PROP 16: Si $X_n \xrightarrow{P} X$, il existe une sous-suite de X_n qui converge presque sûrement vers X .

PROP 17: Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $X_n \xrightarrow{P} Y$, alors $X = Y$.

PROP 18: PROP 8 et PROP 9 sont également vraies avec la convergence en probabilités.

PROP 19: (Inégalité de Markov) Soit X une v.a. positive et $a > 0$. Alors: $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$. Plus généralement, si X^p est intégrable, $P(X \geq a) \leq \frac{E[X^p]}{a^p}$.

PROP 20: (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Si X^2 est intégrable et si $a > 0$, alors $P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$.

EX 22: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a. non corrélées telles que $E[X_i] = 0$ et $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ pour tout $i \geq 1$. Alors:

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 0$.

PROP 23: La formule $d(X, Y) = E[\min(|X - Y|, 1)]$ est une distance sur l'espace des v.a. et est quaternaire par l'égalité presque partout. On a $X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow d(X_n, X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

4) Convergence en loi [CHA]

DEF 24: Une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ converge étroitement vers μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et on note $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$ lorsque $\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \int \varphi d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu$.

DEF 25: On dit que (X_n) converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{L} X$ lorsque $P_{X_n} \xrightarrow{e} P_X$. Cela équivaut à: $\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), E[\varphi(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[\varphi(X)]$.

REM 26: la limite n'est pas unique mais la loi limite l'est.

PROP 27: Soit (X_n) une suite de v.a. n. telle que $X_n \xrightarrow{L} X$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f(X_n) \xrightarrow{L} f(X)$.

PROP 28: Dans DEF 25, on peut remplacer $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ par $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

REM 29: Si $X_n \xrightarrow{L} X$ et $Y_n \xrightarrow{L} Y$ on ne peut rien dire de $X_n + Y_n$. Prenons $X \sim \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$, $X_n = Y_n = -X \forall n \in \mathbb{N}$.

II - Théorèmes et propriétés de convergence

1) Caractérisations de la convergence en loi [CHA]

THM 30: $X_n \xrightarrow{L} X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_X(t)$ (ET 30)
où ϕ_{X_n}, ϕ_X désignent les fonctions caractéristiques.

THM 31: On suppose que $\phi_{X_n} \rightarrow \psi$ avec ψ continue en 0. Alors, ψ est la fonction caractéristique d'une v.a. X .

THM 32: $X_n \xrightarrow{L} X \iff F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(t)$ en tout $t \in \mathbb{R}$ où F_X est continue. F_{X_n}, F_X désignent les fonctions de répartition.

EX 33: Soit (X_n) une suite de v.a. n. telle que $P_{X_n} = \delta_{\frac{1}{n}}$. On a $F_{X_n} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, \infty[}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_0(x)$ où $F_0 = \mathbb{1}_{[0, \infty[}$. Donc $X_n \xrightarrow{L} X$ où $P_X = \delta_0$.

PROP 34: On suppose (X_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$ et X aussi. $X_n \xrightarrow{L} X \iff \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

PROP 35: (Scheffé) Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. n. à densité f_n et X de densité f . On suppose que pour presque tout $x \in \mathbb{R}, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. Alors $f_n \xrightarrow{L} f$ et $X_n \xrightarrow{L} X$.

EX 36: La réciproque de PROP 36 est fautive: une suite de v.a. à densité peut converger en loi vers une v.a. à densité sans que les densités ne convergent. $F_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ comme fonction de répartition. $\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

EX 37: Une suite de v.a. à densité peut converger en loi vers X discrète et inversement:

• $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) = F(nt)$ comme fonction de répartition de X_n .

• $F_n: t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{n} \lfloor nt \rfloor & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

THM 38: (Slutsky) Soient $(X_n), (Y_n)$ deux suites de v.a. n. On suppose que $X_n \xrightarrow{L} X$ et $Y_n \xrightarrow{L} a \in \mathbb{R}$ constante. Alors, le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, a) . On en déduit que $X_n + Y_n \xrightarrow{L} X + a$ et $X_n Y_n \xrightarrow{L} aX$.

2) Liens entre les convergences [CHA] [BAR]

PROP 39: Si (X_n) converge presque sûrement ou dans L^p vers X , alors $X_n \xrightarrow{L} X$.

REM 40: La convergence en probas n'implique pas celle presque sûre. $\Omega = [0, 1]$, P mesure uniforme. Soit $m \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^m$. $i = 2^m + k - 1$. $X_i(\omega) = \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}]}$ (ω). Alors $X_n \xrightarrow{P} 0$ mais pas p.s.

REM 41: La convergence en probas n'implique pas celle dans L^p . $\Omega =]0, 1]$, P uniforme, $a > 0$. $X_n(\omega) = \omega^{-a} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, 1]}$ (ω). Alors $X_n \xrightarrow{P} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{L^p} 0$ dès que $a \geq 1$.

PROP 42: Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et s'il existe $\alpha > 1$ tel que (X_n) soit bornée dans L^α , alors: $\forall p \in]1, \alpha]$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

PROP 43: Si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

REM 44: La réciproque est fautive: soit X_n indépendantes de même loi $B(p, 1 - p)$. (X_n) converge en loi mais pas en probabilité.

PROP 45: Soient $(X_n), (Y_n)$ deux suites de v.a. r. telles que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} a$ et $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} a$ constante. Alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a$.

REM 46: Voir schéma d'implications en annexe.

III - Théorèmes limites

1) Loi forte des grands nombres [CHA]

THM 47: (Loi faible des grands nombres) Soit (X_n) une suite de v.a. r. indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable. Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E[X_1]$ (i.i.d.)

PROP 48: Soit (X_n) i.i.d. telle que $E[X_1] < \infty$. Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} E[X_1]$.

THM 49: (Loi forte des grands nombres) Soit (X_n) i.i.d. intégrables. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} E[X_1]$.

APPLI 50: Si X est de moyenne m inconnue et (X_n) un échantillon de X , $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$ fournit un estimateur sans biais fortement consistant de m .

COR 51: Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{A_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} P(A_1)$

EX 52: Si on lance une infinité de fois un dé et qu'on note A_n l'événement: "Avoir 6 au n-ième lancer", alors la proportion de 6 obtenus au cours des n premiers lancers tend vers $\frac{1}{6}$.

APPLI 53: (Monte-Carlo) Pour approcher $\int_0^1 f(x) dx$ (f continue) on simule une suite (X_n) de v.a. de loi $U(0,1)$ et alors $\int_0^1 f(x) dx = E[f(X_n)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ pour n grand.

2) Théorème Central Limite [CHA] (0.5/2a)

THM 54: Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de carré intégrable. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$

$$\frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

COR 55: Avec les mêmes hypothèses et soit $a > 0$, alors $P(m \in [\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

REM 56: Cela permet de construire des intervalles de confiance.

COR 57: Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. de loi binomiale de paramètres (n, p) . Alors $Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$

PROP 58: (S-méthode) Soit (X_n) une suite de v.a. r. On suppose qu'il existe θ, σ tels que $\ln(X_n - \theta)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Soit g définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en θ telle que $g'(\theta) \neq 0$. Alors $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 g'(\theta)^2)$

ANNEXE : Lien entre les modes de convergence

