

Leçon 261: Loi d'une variable aléatoire.

Caractérisation, exemples, applications

Références: Chabrand, Quersad 2
(un peu)

I - Loi d'une variable aléatoire

- 1) Définitions et propriétés
- 2) Caractérisation par l'espérance

II - Caractérisation par des fonctions

- 1) Fonction de répartition
- 2) Fonction caractéristique
- 3) Fonction génératrice

III - Vecteurs aléatoires et indépendance

- 1) Définitions et propriétés
- 2) Indépendance
- 3) Vecteurs gaussiens

IV - Convergence en loi

- 1) Définition et critères
- 2) Théorème Limite Central

DEV 1: Indécomposabilité de la loi de Poisson

DEV 2: Lévy + TCL

Leçon 26.1: Loi d'une variable aléatoire. Caractérisations. Exemples et applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ mesurable.

I - Loi d'une variable aléatoire

1) Définitions et propriétés [CHA]

DEF 1: Une application mesurable $X: \Omega \rightarrow E$ est appelée variable aléatoire à valeurs dans E . Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (v.a.r.)

EX 2: Si on lance 2 dés, on peut définir la v.a.r. qui est égale à la somme des résultats: $X((i,j)) = i+j$. $\Omega = \{1,6\}^2$ et $E = \{2,12\}$

REM 3: Contrairement à la terminologie, X n'est ni une variable ni aléatoire!

DEF 4: La loi d'une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow E$ est la mesure-image de P par X . C'est donc la probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ notée P_X définie par:

$\forall B \in \mathcal{E}, P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\})$.

DEFS: Une v.a. $X: \Omega \rightarrow E$ est dite discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. Dans ce cas, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$.

PROP 6: La de X discrète est $P_X = \sum_{x \in E} P_X(x) \delta_x$

DEF 7: Une v.a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est à densité lorsque P_X est absolument continue par rapport à λ .

PROP 8: Si X est à densité, alors il existe $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_X(B) = \int_B f(x) dx$. On a en particulier $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 1$.

EX 9: Si $f = 1_{[0,1]}$, on dit que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$. On a alors $\forall 0 \leq a < b < 1, P(a \leq X < b) = b-a$.

REM 10: Si X est une v.a. à densité, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $P(X=x) = 0$.

2) Caractérisation par l'espérance [CHA] [OUV]

DEF 11: Soit X une v.a. λ -intégrable. On appelle espérance mathématique de X la quantité $E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP = \int_{\mathbb{R}^d} x dP_X(x)$

REM 12: On étend cette définition lorsque $X = (X_1, \dots, X_d)$ en prenant $E(X) = (E[X_1], \dots, E[X_d])$.

Si $B \in \mathcal{E}$ et si $X = 1_B$, alors $E[X] = P(B)$.

THM 13 (Transfert) Soit X une v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Pour toute fonction $f: E \rightarrow [0, +\infty)$ mesurable, on a:

$$E[f(X)] = \int_E f(x) dP_X(x)$$

Si f est de signe quelconque, cela reste vrai si $E[f(X)] < \infty$

DEF 14: Soit X une v.a. λ . Si pour $k \geq 1$, X^k est intégrable, on appelle moment d'ordre k la quantité $E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k dP_X(x)$

THM 15: Soit X une v.a. λ . Si pour tout $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive $E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu$, alors $P_X = \mu$.

REM 16: Il suffit de vérifier THM 15 avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue à support compact.

EX 17: Si $P_X = \mathcal{N}(0,1)$, on peut calculer la loi de X^2 . On trouve $P_{X^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} 1_{]0, +\infty[}(x)\right) \cdot 2$

II - Caractérisation par des fonctions

1) Fonction de répartition [CHA] [OUV]

DEF 18: Soit X une v.a. λ , on définit la fonction de répartition de X par $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ par: $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t)$.

PROP 19: Si X est à densité, de densité continue f_X , F_X est une primitive de f_X et on a donc $F_X' = f_X$.

PROP 20: F_X est croissante, continue à droite, limitée à gauche (cad-lag) et $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

PROP 21: $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$ si $a \leq b$. $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

REM 22: Les sauts de F_X correspondent aux atomes de P_X . Une variable à densité a une fonction de répartition continue, celle d'une variable discrète est en escalier.

PROP 23: L'ensemble des points de discontinuité de F_X est au plus dénombrable.

REM 24: Il existe des variables aléatoires discrètes ni à densité: si $\Omega = [0,1]$, $X(\omega) = 1_{[0, \frac{1}{2}]}(\omega) + \omega 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(\omega)$

THM 25: La fonction de répartition caractérise la loi de X : $P_X = P_Y \Leftrightarrow F_X = F_Y$.

DEF 26: Soit F une fonction vérifiant PROP 20. On appelle quantile la fonction $F^*: u \mapsto \inf \{x / F(x) \geq u\}$, $u \in]0, 1[$.

REM 27: Si F est l'écart de $I \subset \mathbb{R}$ dans $]0, 1[$, alors $F^* = F^{-1}$.

PROP 28: Si U est une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et si F vérifie PROP 20, alors $X = F^*(U)$ a pour fonction de répartition F .

EX 29: Soit X tel que $P_X = \mathcal{U}([0, 1])$. Alors $Y = X^2$ a pour densité $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}} 1_{[0, 1]}(t)$ (on calcule $P(Y \leq t)$).

2) Fonction caractéristique [CHA]

DEF 30: Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique de X est $\phi_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto E[e^{i \langle t, X \rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \langle t, x \rangle} dP_X$.

REM 31: Ceci permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X . ϕ_X est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.

PROP 32: Soit X une v.a., $a, b \in \mathbb{R}$. $\phi_{aX}(t) = \phi_X(at)$ et $\phi_{X+b}(t) = e^{it \cdot b} \phi_X(t)$.

PROP 33: On a $\phi_X(0) = 1$. De plus, si $E[|X|^k] < \infty$ pour $k \geq 1$, ϕ_X est k fois dérivable en 0 et $\phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$.

THM 34: La fonction caractéristique caractérise la loi de X : $P_X = P_Y \Leftrightarrow \phi_X = \phi_Y$.

PROP 35: Si ϕ est p fois dérivable en 0, alors X admet des moments d'ordre inférieurs ou égaux à p .

REM 36: On verra dans la suite des propriétés intéressantes liant ϕ et l'indépendance.

3) Fonctions génératrices [CHA] On suppose X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

DEF 37: La fonction génératrice de X est la série entière définie par $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1$, $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) s^k = E[s^X]$.

PROP 38: La fonction génératrice caractérise la loi: $P_X = P_Y \Leftrightarrow G_X = G_Y$.

PROP 39: G est m fois dérivable à gauche en 1 si et seulement si X a un moment d'ordre m , et on a alors:

$$G_X^{(m)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) P(X=k) = E[X(X-1)\dots(X-m+1)]$$

$$G_X'(1) = E[X] \text{ et } G_X''(1) = E[X^2] - E[X].$$

III - Vecteurs aléatoires et indépendance

1) Définitions, propriétés [CHA]

Soient (X, Y) deux v.a. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$.

DEF 40: La loi du couple (X, Y) ou loi conjointe de X et Y est la probabilité sur $(E_1 \times E_2, (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2))$ notée $P_{(X, Y)}$ définie par: $\forall B \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, $P_{(X, Y)}(B) = P((X, Y) \in B)$.

REM 41: Dans le cas de variables discrètes, elle est caractérisée par $(x, y) \mapsto P(X=x, Y=y)$.

PROP 42: Connaissant la loi du couple, on retrouve la loi de X et Y (les marginales):

$$\begin{aligned} \text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont discrètes } P(X=x) &= \sum_{y \in E_2} P(X=x, Y=y) \\ P(Y=y) &= \sum_{x \in E_1} P(X=x, Y=y) \end{aligned}$$

Si (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est à densité $f(x, y)$, la densité de X est: $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx$.

REM 43: Si X et Y sont à densité, (X, Y) ne l'est pas forcément. Le couple (X, X) est à valeurs sur $\{y=x\}$ de mesure nulle.

2) Indépendance [CHA]

DEF 44: On dit que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes lorsque: $\forall F_1, \dots, F_n \in \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_n$, on a:

$$P(X_1 \in F_1, \dots, X_n \in F_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in F_i).$$

THM 45: Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. à valeurs dans $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$. Alors:

$(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes $\Leftrightarrow P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$.

PROP 46: Si X et Y sont discrètes, alors (X, Y) est indépendant $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E_1 \times E_2, P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$.

PROP 47: Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. à densité. Elles sont indépendantes si et seulement si $f_{(X_1, \dots, X_n)} = f_{X_1} \dots f_{X_n}$.

PROP 48: Si X et Y sont à densité indépendantes, alors $X+Y$ est à densité et $P_{X+Y} = (f_X * f_Y) \cdot \lambda$.

PROP 49: Soient X, Y indépendantes, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ et $G_{X+Y} = G_X G_Y$ (pour X, Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$).

APPLI 50: Si $P_{X_1} = P(\lambda_1)$ et $P_{X_2} = P(\lambda_2)$, X_1, X_2 indépendantes alors $P_{X_1+X_2} = P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, (X, Y) indépendantes, $X+Y \sim \mathcal{E}(2\lambda)$.

THM 51: Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_i . On pose $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Alors $G_{S_N}(\lambda) = G_N \circ G_{X_1}(\lambda)$.

5) Vecteurs Gaussiens [CHA]

DEF 52: Un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ est dit Gaussien lorsque toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. n. gaussienne (y compris constante).

EX 53: Toutes les composantes d'un vecteur peuvent être gaussiennes sans que le vecteur soit Gaussien: Prendre $P_X = \mathcal{N}(0, I)$, $P_Y = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$, $Y = XE$, (X, Y) n'est pas Gaussien.

THM 54: LASSE:

1) X est Gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Σ .

2) $\forall u \in \mathbb{R}^d, \phi_X(u) = \exp(iu^T m - \frac{1}{2} u^T \Sigma u)$.

THM 55: Soit X Gaussien de moyenne m et de matrice Σ . $\forall A \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R}), \forall b \in \mathbb{R}^m, X \mapsto AX + b$ est Gaussien et $E[Y] = \text{amp}(b)$, $\Gamma_Y = A \Gamma_X A^T$.

THM 56: Pour X Gaussien, X indépendant $\Leftrightarrow \Sigma$ diagonale.

IV - Convergence en loi [CHA]

1) Définitions et critères (X_n) est une suite de v.a. n. X est une v.a. n.

DEF 57: On dit que (X_n) converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{L} X$ lorsque: $\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), E[\varphi(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[\varphi(X)]$.

PROP 58: Dans DEF 57, on peut remplacer $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ par $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (DEV 43).

THM 59: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. n. et X une v.a. n. $X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_X(t)$.

THM 60: $X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x)$ en tout point x de continuité de F_X .

EX 61: Soit X_n v.a. n. tq $P_{X_n} = \delta_{\frac{1}{n}}$. Alors $X_n \xrightarrow{L} \delta_0$.

PROP 62: Si (X_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, P(X_n=k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X=k)$.

PROP 63: Si X_n a pour densité f_n et X a pour densité f , $X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$, alors $X_n \xrightarrow{L} X$.

2) Théorème Limite Central [CHA]

DEV 42

THM 64: Soit (X_n) une suite de v.a. n. indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable. Alors, si $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a $\frac{S_n - nEX_1}{\sqrt{Var(X_1)}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1)$.

COR 65: Sous les mêmes hypothèses, pour $a > 0$, $P(m \in [\frac{S_n - nEX_1}{\sqrt{n}} - a, \frac{S_n - nEX_1}{\sqrt{n}} + a]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. $m = EX_1, X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

DEV 41

THM: Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X et Y suivent aussi des lois de Poisson.

ANNEXE:

Mettre lois usuelles
+ implication pour les vecteurs Gaussiens