

Leçon 250: Transformation de Fourier - Applications.

Références: El Amrani, Chebano, Tilly-Queffelec
(Fourier)

I - Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

- 1) Définitions et premières propriétés
- 2) Inversion de $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

II - Des transformations de Fourier plus symétriques

- 1) Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$
- 2) Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

III - Applications

- 1) Totalité des polynômes orthogonaux dans $L^2(I, \omega)$
- 2) Fonction caractéristique en probabilités

DEV 1: Injectivité de la TF

DEV 2: Théorème de Lévy + TCL

Leçon 250: Transformation de Fourier - Applications

I - Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1) Définitions et premières propriétés (ELAM)

DEF 1: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable. On définit la transformée de Fourier définie, lorsque cela a un sens, par: $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

LEMME 2: (Riemann-Lebesgue) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ existe et on a
 $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

THM 3: Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$. Par conséquent, l'opérateur $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R})$ est linéaire continu.
 $f \mapsto \hat{f}$

DEF 4: Cet opérateur est la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

DEF 5: On note $\bar{F}$ la transformation de Fourier conjuguée donnée, sur $L^1(\mathbb{R})$, par $\bar{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx$

EX 6: Soit $p: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $p \in L^1(\mathbb{R})$ est la densité de Poisson.
 $F(p)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Par contre:

$$F(1_{[a,b]})(\xi) = \int_a^b \frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i(\frac{a+b}{2})\xi} d\xi \quad \text{si } \xi \neq 0$$

$$F(1_{[-1,1]})(\xi) \notin L^1(\mathbb{R}).$$

DEF 7: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On définit $f_0: x \mapsto f(-x)$ et pour $a \in \mathbb{R}$,
 $T_a f(x) = f(x-a)$

PROP 8: $F(f_0) = (\hat{Ff})_0$; $F(\hat{f}) = \overline{(\hat{Ff})_0}$; $\bar{F}(\hat{f}) = \overline{F(f)}$.

COR 9: $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, f paire $\Rightarrow \hat{f}$ paire (de même pour f impaire).
 f réelle paire $\Rightarrow \hat{f}$ réelle paire (de même pour imaginaire impaire).

PROP 10: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixe, $a \in \mathbb{R}$ fixe.
 $F(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$ et $F(T_a f)(\xi) = e^{-ias} \hat{f}(\xi)$.

De plus $F(e^{iax} f)(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.

DEF 11: On dit que $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables lorsque pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors
 $f * g: x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$

THM 12: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors f et g sont convolables, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. On a donc que $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach.

THM 13: Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est bien définie presque partout, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

PROP 14: Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

PROP 15: Soient $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$. Si $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors
 $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$

PROP 16: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}'$ est continue bornée et:
 $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $(\hat{f})'(\xi) = -i \hat{F}(xf)(\xi)$

2) Immersion de $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R})$ (ELAM)

PROP 17: F n'a pas d'unité dans $L^1(\mathbb{R})$.

DEF 18: On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que:

- (1) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j = 1$
- (2) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi_j(x) dx = 0$

REM 19: On privilégie souvent des familles d'approximations, appelées noyaux, intéressés par $\mathbb{R}^*$ (et on fait $t \rightarrow 0^+$), comme celui de Laplace: $\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ ou celui de Gauss: $\varphi_t(x) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|x|}{t}}$

THM 20: Soit $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$, alors $\|f * \varphi_j - f\|_p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

PROP 21: Pour $b > 0$, soit $\gamma_b: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-b|x|}$. Alors $\gamma_b \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{\gamma}_b(\xi) = \frac{2b}{b^2 + \xi^2}$.

PROP 22: Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f(u)g(u) du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)\hat{g}(v) dv$

THM 23: L'opérateur $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R})$ est injectif.

EX 24: L'équation fonctionnelle $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'a pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

THM 25: (Formule d'inversion) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors
 $f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.
 En d'autres termes, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

REM 26: Ainsi, f induit un isomorphisme de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\{f \in L^1(\mathbb{R}) / \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$. Ceci est assez restrictif car par exemple $F(1_{(0,1)}) \notin L^1(\mathbb{R})$.

THM 27: $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est d'image dense mais n'est pas surjectif.

PROP 28: Si $f, \hat{f}, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.

II - Transformations de Fourier plus symétriques

1) Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ [ELAT]

THM 29: (Plancherel - Parseval) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\| \hat{f} \|_2^2 = 2\pi \| f \|_2^2$$

EX 30: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \pi$

THM 31: (Fourier - Plancherel) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors :

- (1) Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))^\mathbb{N}$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.
- (2) Pour une telle suite (f_n) , la suite $(\hat{f}_n)$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\hat{f}$ indépendante de la suite choisie.

DEF 32: La limite $\hat{f}$ ainsi définie est appelée la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$.

PROP 33: La définition ci-dessus étend la définition dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Autrement dit, si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} = \hat{f}$.

REM 34: Par passage à la limite, on obtient pour $\hat{f}$ toutes les propriétés de translation, modulation, homothétie.

PROP 35: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entre f et $\hat{f}$, on a les relations :

$$\| \varphi_A - \hat{f} \|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \| \varphi_A - \hat{f} \|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \text{ ou on a posé}$$

$$\varphi_A(x) = \int_{-A}^A f(x) e^{-ixs} dx \text{ et } \varphi_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(s) e^{-ixs} ds.$$

COR 36: Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a presque partout

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) e^{-ixs} ds$$

THM 37: Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f}\hat{g}$ et $\widehat{fg}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a : $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}(u) du$

THM 38: Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.

DEF 39: On appelle opérateur de Fourier-Plancherel l'opérateur $P: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

$f \mapsto \frac{1}{2\pi} \hat{f}$
LEMME 40: L'espace vectoriel $V = \{f \in L^1(\mathbb{R}) / \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

THM 41: L'opérateur de Fourier-Plancherel est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ d'inverse $P^{-1} = P$. [ELAT]

2) Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

DEF 42: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide (à l'infini) lorsque pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^\alpha f(x) = 0$.

EX 43: $x \mapsto e^{-|x|}$ est à décroissance rapide. Toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide.

REM 44: La décroissance rapide n'a pas de lien avec la monotonie comme le montre $x \mapsto e^{-|x|} \sin(x)$.

LEMME 45: Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide, alors : $\forall \alpha \in \mathbb{N}, x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R})$.

PROP 46: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide, $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}, f^{(\alpha)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est à décroissance rapide.

REM 47: En particulier, si f est $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide et en est de même pour $\hat{f}$. En revanche $x \mapsto e^{-x^2} \cos(e^{x^2})$ est à décroissance rapide mais pas sa dérivée.

DEF 48: On appelle espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions f de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}$ telles que :

- (i) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
- (ii) f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

REM 49: Les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et tendent vers 0 à l'infini, de même que leurs dérivées.

EX 50: $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Y}(\mathbb{R})$.

PROP 51: $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation, multiplication par un polynôme, produit. De plus, si $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$, alors f , f_0 , $T_a f$ et $f(\cdot) e^{-i a \cdot}$ sont dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$.

THM 52: $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$.

DEF 53: On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ lorsque: $\forall \epsilon, \beta \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\beta |f_n(x)| = 0$.
Ainsi, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{Y}(\mathbb{R})} f \Leftrightarrow f_n - f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{Y}(\mathbb{R})} 0$.

PROP 54: Si $f, g \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$, alors $f \cdot g \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$.

THM 55: La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$.
On a $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}$.

III - Applications

1) Totalité des polynômes orthogonaux dans $L^2(I, \omega)$ [ELAT]

DEF 56: Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle poids sur I une fonction $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \omega(x) dx < \infty$.

On se place dans l'espace $L^2(I, \omega) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty\}$ que l'on munit du produit scalaire $(fg) \mapsto \int_I f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx$.

PROP 57: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux et tel que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associés au poids ω .

EX 58: $I =]0, +\infty[$, $\omega(x) = e^{-x}$: polynômes de Laguerre
 $I =]-1, 1[$, $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: polynômes de Tchebychev.

PROP 59: Soit ω une fonction poids sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_a^b e^{-\alpha|x|} \omega(x) dx < \infty$ alors les polynômes orthogonaux associés à ω (non normalisés) forment une base hilbertienne de $L^2(I, \omega)$.

2) Fonction caractéristique en probabilités [CHA] [Z. 2]

DEF 60: Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r.).

On définit sa fonction caractéristique par $\phi_X(t) = E[e^{itX}]$.

REM 61: Ceci permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X . De plus, ϕ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

PROP 62: Si X et Y sont des v.a.r., on a par injectivité de la transformée de Fourier: $\phi_X = \phi_Y \Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} Y$.

PROP 63: Si $\int_{\mathbb{R}} |t| \phi_X(t) dt < \infty$, alors X admet une densité f continue avec $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_X(t) e^{-itx} dt$.

DEF 64: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{L} X$ lorsque: $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$.

THM 65 (Levy): Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. $X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_X(t)$. DEV 2

THM 66 (Central Limite): Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$.

Alors $\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.