Clément Deslandes

171

Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Gourdon, Algèbre 3, De Beaumarchais, Rouvière

Dans toute la leçon, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

I - Formes bilinéaires, formes quadratiques.

I.1) Formes bilinéaires

Déf 1 Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, on dit que φ est bilinéaire si $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, .)$ et $\varphi(., y)$ sont linéaires. Si de plus $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$. On dit que φ est symétrique (en abrégé, φ b.s.)

Prop. 2 Pour $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, pour φ bilinéaire symétrique, $\underset{x,y\in E}{\varphi(x,y)} = {}^tX S Y$ où X, Y sont les coordonnées de x, y dans B, et $S = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n} \in S_n(\mathbb{R})$. De plus l'application $\mathcal{M}_B : \varphi \mapsto (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est un isomorphisme des formes bilinéaires symétriques E dans $S_n(\mathbb{R})$.

Prop. 3 Soit φ b.s. sur E et B, B' deux bases de E. Soit P la matrice de passage de B à B'. On a

$$\mathcal{M}_{B'}(\varphi) = {}^tP \mathcal{M}_B(\varphi) P$$

Cor. 4 Pour toute base B de E, le rang de $\mathcal{M}_B(\varphi)$ est le même. On peut donc définir $rg(\varphi) = rg\,\mathcal{M}_B(\varphi)$ (où B est une base de E).

Déf 4 On dit que φ est dégénérée si $rg(\varphi) < n$.

Ex. 5 $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto xx' - yy'$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc elle est de rang 2.

I.2) Formes quadratiques

Déf. 6 Soit $q : E \to \mathbb{R}$, on dit que q est une forme quadratique (f.q) sur E s'il existe φ une forme bilinéaire symétrique sur E telle que
$\forall x \in E, \quad q(x) = \varphi(x, x)$.

Ex. 7 Pour H la hessienne d'une fonction C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $X \mapsto {}^tXHX$ est une f.q. sur $\mathbb{R}^n$.

Prop. 8 Soit $q : E \to \mathbb{R}$. q est une f.q. sur E s.s.i $\exists (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, $q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i x_j$

Prop. 9 Soit q une f.q, il existe une unique forme b.s φ telle que $\left(\underset{x\in E}{q(x)} = \varphi(x,x)\right)$, et on a $\left(\underset{x,y\in E}{\varphi(x,y)} = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))\right)$.

Déf. 10 Pour q une f.q et B une base de E, on note $\mathcal{M}_B(q) := \mathcal{M}_B(\varphi)$ où φ est la forme b.s associée à q.

Rmq 10 Isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{f.b.s sur } E & & \\ & \nearrow & \updownarrow & & \\ S_n(\mathbb{R}) & \longleftrightarrow & \text{f.q sur } E & \longleftrightarrow & \text{polynômes hom de deg. 2} \end{array}$$

Ex 11. $(x,y,z) \mapsto 3x^2+y^2+2xy-3xz$ a comme matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Def 12. Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A selon q (ou selon φ, sa forme bs associée) l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ \varphi(x,y) = 0\}$.
Pour $B \subset E$, on dit que A et B sont orthogonaux et on note $A \perp B$ quand $A \subset B^\perp$.

Def 13 On appelle noyau de q $\operatorname{Ker} q := E^\perp$.
q est dite dégénérée si $\operatorname{Ker} q \neq \{0\}$.

Prop 14 Soit q une f.q de forme b.s. associée φ.
q dégénérée $\Leftrightarrow$ φ dégénérée.

Def 15 On note $C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$ le cône isotrope de q.
Rmq 16 Ce n'est pas forcément un espace vectoriel.
Prop. 17 $\operatorname{Ker} q \subset C_q$.
Ex. 18 $q : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. $\operatorname{Ker} q = \{0\}$, $C_q = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

II - Réduction des formes quadratiques.

II.1) Théorème spectral, base orthogonale

Def 19 Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonal pour φ si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ quand $i \neq j$.

Thm 20 (théorème spectral). Soit φ une forme bs, et $\langle .\rangle$ un produit scalaire sur E. Il existe une base orthonormée orthogonale pour φ.

Cor 21 (version matricielle). Pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PD^tP$

Cor 22 Toute f.q admet une base orthogonale qui est de plus orthonormée pour le produit scalaire

Def 23 Une f.q q est dite définie-positive si $\forall x \in E \setminus \{0\}\ q(x) > 0$, ie ssi φ est un produit scalaire

Cor 23' Si q_1, q_2 sont deux f.q, avec q_1 définie positive, on dispose d'une base $\mathcal{B}$ orthonormée pour q_1 (ie $M_{\mathcal{B}}(q_1) = I_n$) et orthogonale pour q_2.

Ex 24 Si $q_1 : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ et $q_2 : (x,y) \mapsto -2xy$, on n'a pas de base orthogonal commune.
Ex 25 Si $q_1 : (x,y) \mapsto x^2+y^2$, $q_2 : (x,y) \mapsto -2xy$, on dispose d'une base orthogonale commune.

App. 26 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$ vérifie $f(a) = 0$, $df_a = 0$ en un certain $a \in \mathbb{R}^n$, $f(a+x) = {}^tXHX + o(\|x\|^2)$ où H est la hessienne de f en a $\rightarrow$ on peut prendre une base orthornée, orthogonale pour d^2f_a

Rmq 27 Trouver une base orthogonale pour q revient à trouver des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_n$ telles que $\left(q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(x)^2\right)_{x \in E}$ où a_i sont des réels. On a une construction algorithmique des ℓ_i avec la <u>méthode de Gauss</u>

Ex 28 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = (x_1+x_3)(x_2+x_3) - x_3^2$

$$= \left(\frac{x_1+x_2+2x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 - x_3^2$$

$\boxed{\text{DVP 1}} \rightarrow$ **App 28'** (Ellipsoïde de John-Loewner). Pour K compact d'intérieur $\neq \emptyset$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en O contenant K.

II.2) Signature

Thm 29 (d'inertie de Sylvester). Pour toute f.q. q, il existe un unique $(s,t) \in \mathbb{N}$ tel que $s+t = r$ et dans une certaine base $\mathcal{B}$ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

(s,t) est appelé la signature de q.

Prop 30 Soit q ~~une~~ f.q. et (s,t) sa signature.
On a $s = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } E, \ q|_F \text{ définie-positive}\}$
et $t = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } E, \ -q|_F \text{ définie-positive}\}$

App 30' Caractérisation avec les mineurs des matrices déf >0.

Ex 31 $M \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMM)$ est de signature $\cancel{\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)}$.

Ex 32 $x \mapsto \sum_{i \neq j} x_i x_j$ est de signature $(1, n-1)$. $(n^2, 0)$

Rmq 33 La signature est un invariant total de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ par $P.S = {}^tPSP$.

Prop. 34 Les composantes connexes de l'ensemble des formes quadratiques non-dégénérées sont les orbites de l'action de la remarque 33.

App 35 (Lemme de Morse) $\leftarrow \boxed{\text{DVP 2}}$
Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$ tel que d^2f_0 est non dégénérée, $f(0)=0$ et $df_0 = 0$. Alors on dispose d'un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0)=0$ et sur un voisinage V de 0,
$\left(f(x) = \varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_s^2(x) - \varphi_{s+1}^2(x) - \dots - \varphi_n^2(x)\right)_{x \in V}$.

App 36 Classification des coniques.
Dans $\mathbb{R}^2$, ${}^tXSX + {}^tXU + c = 0$ se ramène, par translation, à ${}^tX'SX' + C = 0$. On a alors
soit la signature est $(2,0)$ $\to$ cercle, point, ou $\emptyset$
(si $(0,2)$, $c \to -c$)
Soit la signature est $(1,1)$ $\to$ hyperbole ou deux droites
Soit la forme est dégénérée