

Leçon 246: Séries de Fourier. Exemples et applications

Références: El Amrani, Gourdon, Francinou 4
(Fourier) (Dev 2)

I - Généralités sur les séries de Fourier

- 1) Classes de fonctions 2π -périodiques
- 2) Polynômes et séries trigonométriques
- 3) Coefficients et séries de Fourier

II - Différents modes de convergence des séries de Fourier

- 1) Convergence au sens de Césaro
- 2) Convergence en moyenne quadratique et Théorie $L^2_{2\pi}$
- 3) Convergence ponctuelle et uniforme
- 4) Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

III - Applications

- 1) Calculs de sommes
- 2) Formule sommatoire de Poisson
- 3) Equation de la chaleur

DEV 1: Théorème de Fejer + application

DEV 2: Equation de la chaleur

Leçon 24.6: Séries de Fourier. Exemples et applications

I - Généralités sur les séries de Fourier

1) Classes de fonctions 2π -périodiques (ELAT)

DEF 1: Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite périodique lorsqu'il existe $T > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

REM 2: On peut se ramener à une période de 2π par dilatation. On peut généraliser DEF 1 avec f définie presque partout.

DEF 3: On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues 2π -périodiques. Il s'identifie aux fonctions continues sur le cercle: $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. On le munit de $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$.

DEF 4: On note $L^p_{2\pi}$ l'espace des classes de fonctions 2π -périodiques de puissance p intégrable muni de $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$. Si $p=1$, $L^1_{2\pi}$ est l'espace des classes de fonctions 2π -périodiques essentiellement bornées muni de $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$, $0 \leq x < 2\pi$.

LEM 5: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in L^1_{2\pi}, \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx$.

PROP 6: On a $\mathcal{C}_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ si $p \in [1, +\infty]$.

PROP 7: $(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2)$ est complet pour tout $p \in [1, +\infty]$. $(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert (on $\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$).

PROP 8: $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$ ($p \in [1, +\infty]$).

2) Polynômes et séries trigonométriques (ELAT) (CA)

DEF 9: $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $e_n(x) = e^{inx}$.

PROP 10: $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2_{2\pi}$ appelé système trigonométrique.

DEF 11: On appelle polynôme trigonométrique de degré $N \in \mathbb{N}$ toute fonction $P_N: x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ ($c_n \in \mathbb{C}$).

PROP 12: Une telle fonction est équivalente à une fonction de la forme $x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ sont donnés par: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = c_n + c_{-n}$; $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

REM 13: P_N est nul $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, c_n = 0$.

DEF 14: On appelle série trigonométrique une série de fonctions de la forme $x \mapsto c_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$. On la note $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

PROP 15: Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ (i.e. $\sup_{p, q \in \mathbb{Z}} \sum_{p \leq n \leq q} |c_n| < \infty$), on a $\sum c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et définit une fonction $\mathcal{C}_{2\pi}$.

3) Coefficients et séries de Fourier (ELAT)

DEF 16: Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

REM 17: Pour $f \in L^2_{2\pi}$, $c_n(f) = \langle f | e_n \rangle$.

DEF 16 est motivée par le fait que si $P = \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}$, on a $a_n = c_n(P)$.

PROP 18: Pour $f, g \in L^1_{2\pi}$, le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout par $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x) g(t) dt$.

PROP 19: Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $(b, n) \in \mathbb{Z}^2$, $g \in L^1_{2\pi}$.

(i) $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$ ($f * g(x) = f(x-a)$) (ii) $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$

(iii) $c_n(f * g) = e^{-ina} c_n(f)$ où $f * g(x) = f(x-a)$

(iv) $c_n(e_k * f) = c_{n-k}(f) c_n(e_k)$

Si de plus $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap L^1_{2\pi}$, alors $c_n(f') = in c_n(f)$.

PROP 20: $\forall f, g \in L^1_{2\pi}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g)$

PROP 21: (Riemann-Lebesgue) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$.

PROP 22: $\gamma: (L^1_{2\pi}, *, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}), \cdot, \|\cdot\|_0)$ est un morphisme $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ d'algèbres contenues de norme 1.

REM 23: Tout ce qui précède et ce qui suit est valable pour $f \in L^1_{2\pi}$ en posant $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

EX 24: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique définie par: $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. Alors $c_0(f) = \frac{1}{3}$ et $c_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

DEF 25: On définit les coefficients de Fourier réels par: $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

PROP 26: $\forall f \in L^1_{2\pi}$, f paire $\Rightarrow b_n(f) = 0$ et f impaire $\Rightarrow a_n(f) = 0$.

DEF 27: Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

- La théorie des séries de Fourier repose sur les questions :
- Pour quelles fonctions f y a-t-il convergence de $S_N(f)$?
 - Y a-t-il convergence vers f ?
 - De quel type de convergence s'agit-il ?

II - Différents modes de convergence des séries de Fourier

1) Convergence au sens de Cesàro [ELAT]

DEF 28: Pour $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on note $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N S_n(f)$ la N -ième somme de Cesàro de la série de Fourier de f . On dit que $\sum c_n e_n$ converge au sens de Cesàro en x_0 lorsque $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x_0)$ existe.

DEF 29: On définit le noyau de Dirichlet d'ordre N par $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$

PROP 30: (1) D_N est paire, 2π -périodique et: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$
 (2) D_N est le prolongement par continuité de $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$
 (3) $\forall f \in L^1_{2\pi}$, on a $S_N(f) = f * D_N$

PROP 31: $\|D_N\|_1 \sim \frac{4}{\pi} \ln(N)$

DEF 32: La fonction $F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N D_n(Ne^{iN\theta})$ est appelé noyau de Fejér d'ordre N .

PROP 33: (1) $F_N = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N}) e_n$ et $\sigma_N(f) = f * F_N \forall f \in L^1_{2\pi}$
 (2) $(F_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

En particulier, F_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{N+1/2}{2}x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}$.

REM 34: Pour calculer explicitement des séries de Fourier, il peut être avantageux d'utiliser la parité de f .

THM 35: (Fejér) (1) Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, alors $\|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} = 0$.

(2) Si $f \in L^1_{2\pi}$, $p \in [1, \infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

COR 36: Les polynômes trigonométriques sont denses dans $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_{\infty})$ et dans $(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < \infty$.

COR 37: L'application γ définie en PROP 22 est injective.

COR 38: (Weierstrass) Toute fonction continue sur un compact $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ de fonctions polynomiales.

2) Convergence en moyenne quadratique et Théorie $L^2_{2\pi}$ [ELAT]

COR 39: Le THM 39 implique que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

THM 40: (Parseval) Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors:

• $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ i.e. $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$ dans $L^2_{2\pi}$.

• On a la formule $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$

COR 41: L'application γ définie en PROP 22 est donc un isomorphisme isométrique de $L^2_{2\pi}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$.

EX 42: (Wirtinger) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$, alors $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ avec égalité si: $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0$. (Gou)

3) Convergence ponctuelle et uniforme [ELAT]

THM 43: Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}^0$. Si $S_N = \sum_{n=-N}^N u_n e_n$ converge vers f dans $L^1_{2\pi}$, alors $u_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

PROP 44: Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors:

$S_N(f)(x_0) = f * D_N(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) - f(x_0-t) D_N(t) dt$

PROP 45: Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = s$ si et seulement si il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{2} D_N(t) dt = 0$.

PROP 46: (Localisation) Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) - S_N(g)(x_0) = 0$. (DEV 1/2)

THM 47: (1) Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors:

$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = l \Rightarrow l = f(x_0)$

(2) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n(x)$.

THM 48: Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1 \cap \mathcal{C}_{pm}^1$, alors $S_N(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on a $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

THM 49: (Contre-exemple de Fejér) Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $S_N(f)(0)$ diverge.

THM 50: (1) Si f et g sont dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ partout sur $\mathbb{R}$.

(2) Si f et g sont dans $L_{2\pi}^1$ et si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ dans $L_{2\pi}^1$.

THM 51 (Dini) Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existent (notées resp. $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$) et que $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-}$ et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+}$ existent. Alors:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

4) Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

THM 52: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^p$. Alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^p}\right)$ et $\|S_N(f) - f\|_p = o\left(\frac{1}{N^{p-1}}\right)$.

COR 53: Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^2$, alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

THM 54: Soient $f \in L_{2\pi}^1$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Si $c_n(f) = O(|n|^{-k})$ alors $f \in \mathcal{C}^{k-2}$.

III - Applications

1) Calculs de sommes [GOU]

EX 55: L'étude $f: x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ (comme dans EX 24) permet de calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

EX 56: L'étude de la fonction 2π -périodique $x \mapsto \cos(x)$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ donne: $\forall t \in \mathbb{Z}, \cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2}$

2) Formule sommatoire de Poisson [GOU]

DEF 57: Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on définit $f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$.

PROP 58: Avec ces notations, $f(x+m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi n x}$.

APPLI 59: $\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{k^2}{s}}$

3) Equation de la chaleur [FRA]

DEV 2

THM 60: Soit $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle continue 2π -périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. L'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

possède une unique solution u 2π -périodique continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.