

Leçon 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

Références: Queffelec, Tauvel, El Amrani (Fouquier)
(Ana. Comp. et applicat°)

I - Fonctions holomorphes et intégrales curvilignes

1) Fonctions holomorphes

2) Intégrales curvilignes

II - Holomorphie et analyticité

1) Equivalence des deux notions

2) Propriétés analytiques des fonctions holomorphes

3) Application aux polynômes orthogonaux

III - Fonctions méromorphes

1) Séries de Laurent et singularités

2) Théorème des résidus et applications

IV - Produits infinis

DEV 1: Zéros  t s, prolongement analytique, application

DEV 2: Polynômes orthogonaux

Leçon 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

Dans toute la leçon, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

I - Fonctions holomorphes et intégrales curvilignes

1) Fonctions holomorphes [QUE]

DEF 1: On dit que f est holomorphe en $a \in \Omega$ lorsqu'il existe complexe $l \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$. On note

alors $l = f'(a)$. Si f est holomorphe en tout point $a \in \Omega$, on dit que f est holomorphe sur Ω .

EX 2: $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

PROP 3: L'holomorphie présente les mêmes règles sur les opérations que la dérivation réelle (somme, produit, quotient, composition).

THM 4: (Conditions de Cauchy - Riemann): Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et $a = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Soit $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ $(x, y) \mapsto f(x + iy)$

f est holomorphe $\Leftrightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ (i.e. $\frac{\partial F}{\partial x} = i \frac{\partial F}{\partial y}$)

THM 5: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme sur $\bar{D}(0, R)$. Alors, f est holomorphe et $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. De plus, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.

REM 6: Les fonctions $\exp$, $\cos$, $\sin$, ... sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

THM 7: (Logarithme) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\Omega_a = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$. Il existe une fonction L_a holomorphe sur Ω_a appelée déterminant d'ordre a du logarithme telle que $e^{L_a(w)} = w$ pour tout $w \in \Omega_a$. Elle définit par:

$\forall w \in \Omega_a$, $w = |w|e^{i\theta}$, $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, $L_a(w) = \ln(|w|) + i\theta$

De plus, $L'_a(w) = \frac{1}{w}$ $\forall w \in \Omega_a$.

DEF 8: L_a s'appelle la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

PROP 5: Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

2) Intégrales curvilignes [QUE] continue

DEF 10: Un chemin est une application $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(a)$ est l'origine du chemin, $\gamma(b)$ son extrémité. Le sous-ensemble $\gamma^* = \gamma([a, b])$ s'appelle l'image de γ . Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que le chemin est fermé. Si γ est injective, on dit que c'est un chemin simple. Si γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on dit que c'est une courbe.

EX 11: Si $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$, alors $J = \gamma$ ou $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

Le cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ est l'image de $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ $t \mapsto a + re^{it}$

DEF 12: Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une courbe et si f est continue sur γ^* , on définit l'intégrale curviligne de f le long de γ par: $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

PROP 13: Si γ est une courbe de longueur $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ et f continue sur γ^* , on a $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| L(\gamma)$.

PROP 14: Si $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est une courbe d'origine u et d'extrémité v et f est holomorphe sur $\Omega \supset \gamma^*$ avec f' continue sur γ^* , on a l'égalité $\int_{\gamma} f'(z) dz = f(v) - f(u)$.

DEF 15: Soit γ une courbe fermée et $a \notin \gamma^*$. On appelle indice de a par rapport à γ et on note $I(a, \gamma)$ l'intégrale auxiliaire: $I(a, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$.

$I(a, \gamma)$ est destiné à compter le nombre de tours orientés que fait γ autour de a .

THM 16: L'indice possède les propriétés suivantes:

- (1) $I(a, \gamma) \in \mathbb{Z}$
- (2) $a \mapsto I(a, \gamma)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- (3) $I(a, \gamma)$ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
- (4) $|1 - \gamma(t)| < 1 \Rightarrow I(0, \gamma) = 0$.

THM 17 (Jordan, ADMIS) Soit γ une courbe fermée simple, dont le complémentaire a deux composantes connexes C_0 et C_∞ . Alors, $a \in C_0 \Rightarrow \text{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$.

II - Holomorphie et analyticité

1)  quivalence des deux notions [QUE]

THM 18 (Cauchy triangulaire) Soit $\Delta(u, v, w)$ un triangle plein contenu dans Ω , soit $a \in \Omega$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Si γ est le bord du triangle orienté positivement, $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

COR 19 (Cauchy convexe) Ω convexe, $a \in \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ et continue sur Ω . Alors,

- (1) f admet une primitive sur Ω
- (2) On a $\int_\gamma f(z) dz = 0$ pour toute courbe fermée γ telle que $\gamma^* \subset \Omega$.

THM 20: Soit $D(a, r) \subset \Omega$ de bord positivement orienté γ . Soit $f \in H(\Omega)$. Alors: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D(a, r)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D(a, r), f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

DEF 21: On dit que f est analytique lorsque f est développable en série entière en chacun de ses points.

COR 22: Si $f \in H(\Omega)$, alors $f \in A(\Omega)$ (i.e est analytique)

$$\forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

2) Propriétés analytiques des fonctions holomorphes [QUE]

THM 23: Soit (T, μ) un espace mesuré, $f: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- (1) $\forall z \in \Omega, t \mapsto f(z, t) \in L^1(\mu)$
 - (2) Pour presque tout $t \in T$, $z \mapsto f(z, t)$ est holomorphe
 - (3) Pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $g_K \in L^1(\mu)$ telle que $|f(z, t)| \leq g_K(t)$ pour tout $z \in K$ et presque tout $t \in T$.
- Alors $F: z \in \Omega \mapsto \int_T f(z, t) d\mu(t)$ est définie et holomorphe sur Ω et: $\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(z) = \int_T \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z, t) d\mu(t)$

EX 24: $\Gamma: z \in \mathbb{D} \mapsto \int_0^{+\infty} t z^{-1} e^{-t} dt$ est holomorphe

THM 25 (Inégalités de Cauchy) Soit f holomorphe sur le disque $D(a, R)$, $\forall z \in \mathbb{D}, |z-a| \leq R \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Pour $0 \leq n \leq R, M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$. Alors $|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

THM 26 (Liouville): Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ entière bornée. Alors, f est constante.

THM 27 (Zéros isolés) Soit $f \in H(\Omega)$ non identiquement nulle et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$. Alors:

- (1) Si $a \in Z(f)$, $\exists k \geq 1, \exists g \in H(\Omega), \forall z \in \Omega, f(z) = (z-a)^k g(z)$ et $g(a) \neq 0$.
- (2) $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω .

COR 28 (Prolongement analytique) Soit Ω ouvert connexe et soient $f, g \in H(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω . Alors $f = g$. En particulier, si f et g co cident sur un ouvert non vide de Ω , elles sont égales.

APPLI 29: Soit $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors $f(z) = \sqrt{e^{-\frac{z^2}{2}}}$.

THM 30: Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega)$ continue sur $\bar{\Omega}$. On note $M = \sup_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$. Autrement dit, f atteint son maximum au bord de Ω .

REM 31: Si $|f|$ atteint son maximum en $a \in \Omega$, alors f est constante sur la composante connexe de Ω contenant a .

LEMME 32 (Schwarz): Soient $R > 0, \pi > 0, f: D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0, |f(z)| \leq \pi \quad \forall z \in D(0, R)$. Alors:

- (1) $|f(z)| \leq \frac{\pi}{R} |z| \quad \forall z \in D(0, R)$ et $|f'(0)| \leq \frac{\pi}{R}$.
- (2) Si on a l'égalité en $z_0 \neq 0$ ou si $|f'(0)| = \frac{\pi}{R}$, alors $f(z) = u z$ où $|u| = \frac{\pi}{R}$.

DEF 33: On appelle automorphisme analytique toute fonction holomorphe bijective de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ telle que f^{-1} est holomorphe.

THM 34: Pour $a \in D(0, 1)$, on définit $\psi_a: D \rightarrow D$ $z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

Alors $\text{Aut}(D) = \{\lambda \psi_a \mid |\lambda| = 1, a \in D\}$.

3) Application aux polynômes orthogonaux [ELAM Fano]

DEF 35: Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle poids sur I toute fonction $w: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n w(x) dx < \infty$. On considère alors

$L^2(I, w) = \{f \text{ mesurable sur } I \mid \int_I |f(x)|^2 w(x) dx < \infty\}$
que l'on munit du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)w(x) dx$

PROP 36: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$

EX 37: $I =]0, +\infty[$, $w(x) = e^{-x}$ (Laguerre), $I = \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$ (Hermite)

THM 38: Soit w un poids sur $I \subset \mathbb{R}$. Si il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_0^\alpha x |w(x)| dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I, w)$.

III - Fonctions méromorphes [TAU] + V

1) Séries de Laurent et singularités
DEF 39: Soient $r, R > 0$. $\mathcal{B}(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ la couronne centrée en 0. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge dans un disque de rayon $\frac{1}{R}$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| \leq R$, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge absolument sur $\mathcal{B}(r, R)$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

PROP 40: Une telle fonction est holomorphe sur $\mathcal{B}(r, R)$. Toute fonction holomorphe sur une couronne est développable en série de Laurent (DSL).

DEF 41: Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ son DSL sur $D(a, r)$ ($r > 0$).

- Si $\forall m \in \mathbb{N}, a_m \neq 0 \neq \emptyset$, a est une singularité artificielle
- Si $\exists m \leq -1, a_m \neq 0$ est fini, a est un pôle
- Si $\exists m \leq -1, a_m \neq 0$ est infini, a est une singularité essentielle

PROP 42: Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.

- a est artificielle $\Leftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a
- a est un pôle $\Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$

$$\Leftrightarrow \exists g \in H(\Omega), \forall z \neq a, f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, m \text{ est l'ordre du pôle}$$

DEF 43: On dit que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe lorsque f est holomorphe sur $\Omega \setminus Z$ où Z est fermé d'adhérence dans Ω , constitué de pôles de f . On note $\mathcal{M}(\Omega)$ leur ensemble.

PROP 44: $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre.

2) Théorème des résidus et applications [TAU]

DEF 45: Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ un pôle de f d'ordre m .

$$\exists r > 0, \forall (a, r) \subset \Omega \text{ et } \forall z \in D(a, r), f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

On dit que a_{-1} est le résidu de f en a et on note $\text{Res}(f, a)$.

EX 46: Si a est un pôle d'ordre 1, $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$

THM 47: (Résidus) Soit Ω ouvert connexe, $a_1, \dots, a_n$ des points deux à deux distincts de Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$.

On suppose que chaque a_j est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé tel que $a_j \notin \gamma$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. On a:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(a_j) \text{Res}(f, a_j)$$

EX 48: On peut calculer l'intégrale de Dirichlet: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

IV - Produits infinis de fonctions [TAU]

THM 49: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact de Ω . Alors $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est holomorphe.

PROP 50: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge, alors

$\prod (1+u_n)$ converge

PROP 51: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\prod (1+u_n)$ converge.

THM 52: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge normalement sur tout compact. Alors $\prod (1+f_n)$ converge et $f: z \in \Omega \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z))$ est holomorphe.

THM 53: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes telle que $\prod f_n$ converge absolument uniformément sur tout compact de Ω . Soit $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$. Alors $\sum \frac{f'_n}{f_n}$ converge uniformément sur tout compact et $f' = f \sum \frac{f'_n}{f_n}$.

APPL 54: $\forall z \in \mathbb{C}, \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$