

Léon 264: Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

Références: RDO 3, Romhaldi, Arnaudès, Tassell, Gounon, Zully-Breffel
El Amrani Fraisse

I - Logarithme et exponentielle réels

- 1) Définitions et propriétés
- 2) Fonctions circulaires
- 3) Fonctions hyperboliques

II - Logarithme et exponentielle complexes

- 1) Exponentielle complexe
- 2) Logarithme complexe

III - Analyse complexe et analyse de Fourier

- 1) Etude de la fonction Γ
- 2) La fonction ζ
- 3) Analyse de Fourier

DEV 1: Etude de la fonction Γ

DEV 2: Injectivité de la TF

Leçon 244. Exemples d'étude et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

I - Logarithme et exponentielle réels

1) Définitions et premières propriétés [RDO]

DEF 1: La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie sur $\mathbb{R}^*_+$ comme l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1.

PROP 2: La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$. $\forall a, b \in \mathbb{R}^*_+, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

PROP 3: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$.

PROP 4: La fonction $\ln$ est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}^*_+$ sur $\mathbb{R}$.

DEF 5: La fonction exponentielle, notée $\exp$ ou $t \mapsto e^t$ est l'application réciproque de la fonction $\ln$.

DEF 6: Pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $a^t = e^{t \ln(a)}$

PROP 7: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha} = 0$; $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\beta (\ln(t))^\alpha = 0$ ($\alpha > 0$; $\beta > 0$).

PROP 8: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{a^t} = 0$; $\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^\alpha a^t = 0$ ($\alpha > 0$; $a > 1$).

2) Fonctions circulaires [ARN-FRAY] [RDO]

DEF 9: Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Le point M d'affixe z est repéré par ses coordonnées $(\cos(\theta); \sin(\theta))$ où θ est l'angle orienté positivement entre $\vec{x}$ et $\vec{Oz}$.

PROP 10: Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x), \sin'(x) = \cos(x)$

PROP 11: $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

PROP 12: $\cos$ est paire, $\sin$ est impaire.

PROP 13: On lit sur le cercle que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos(x) & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \cos(\pi + x) &= -\cos(x) & \sin(\pi + x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

THM 14: L'application $\sin$ induit un homéomorphisme croissant de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. La réciproque s'appelle Arcsinus, elle est croissante de $[-1; 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

THM 15: L'application $\cos$ induit un homéomorphisme décroissant de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. La réciproque s'appelle Arccosinus, elle est décroissante de $[-1; 1]$ sur $[0; \pi]$.

THM 16: Arccos et Arcsin sont dérivables sur $]-1; 1[$: $\forall x \in]-1; 1[, \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

DEF 17: Sur $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, on définit la fonction tangente par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

THM 18: La restriction de $\tan$ à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme croissant de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La réciproque s'appelle Arctangente est croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

PROP 19: Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et: $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

REM 20: Voir les courbes représentatives en ANNEXE.

3) Fonctions hyperboliques [RDO]

DEF 21: On définit les fonctions cosinus, sinus, tangente hyperboliques par: $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

PROP 22: Ces fonctions sont définies, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}'(t) = \text{sh}(t)$; $\text{sh}'(t) = \text{ch}(t)$; $\text{th}'(t) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)}$.

PROP 23: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{sh}(t) = +\infty$; $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{ch}(t) = 1$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{th}(t) = 1$.

PROP 24: $\text{ch}(t) + \text{sh}(t) = e^t$; $\text{ch}(t) - \text{sh}(t) = e^{-t}$; $\text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

THM 25: $\text{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\text{ch}: \mathbb{R}^+ \rightarrow [1; +\infty[$ et $\text{th}: \mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[$ sont des homéomorphismes croissants. Les réciproques sont notées Argsh , Argch , Argth .

PROP 26: $\forall t \in \mathbb{R}, \text{Argsh}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$
 $\forall t \in \mathbb{R}^+, \text{Argch}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$; $\forall t \in \mathbb{R}, \text{Argth}(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$

II - Logarithme et exponentielle complexes

1) Exponentielle complexe [TAU] $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

PROP 27: La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

DEF 28: On définit la fonction exponentielle par $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

PROP 29: $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$.

PROP 30: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, $e^z \neq 0$, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

THM 31: $\exp$ induit un morphisme de groupes continus de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Il est surjectif mais non injectif.

THM 32: L'application $\phi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes surjectif et non injectif. Son noyau est de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}^*$. On a $a = 2\pi$.

PROP 33: Le noyau de $\exp$ est $2i\pi\mathbb{Z}$ et $\exp$ est $2i\pi$ -périodique.

DEF 34: En définissant $\cos$ et $\sin$ par: $t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{Re}(e^{it})$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{Im}(e^{it})$, on retrouve les

DEF 9 et on a $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$. De plus, on a: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$ et $\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$.

DEF 35: On peut également définir les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par:

$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$; $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

$\operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$; $\operatorname{sh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

LEM 36: Si $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$ et $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$.

2) Logarithme complexe [TAU] $U \subset \mathbb{C}$ ouvert non vide, $0 \notin U$.

DEF 37: Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle logarithme de z tout complexe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $e^\zeta = z$.

Une détermination continue du logarithme sur U est une application continue $\ell: U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$, $e^{\ell(z)} = z$.

PROP 38: Les déterminations continues du logarithme sur U diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$.

DEF 39: Soit $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On appelle détermination principale du logarithme sur Ω_0 la fonction Log définie par: $z \in \Omega_0$, $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi[$, $\operatorname{Log}(z) = \ln(r) + i\theta$.

PROP 40: Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z}$.

THM 41: On suppose U connexe.

Toute détermination continue du logarithme sur U est une primitive sur U de $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Si $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur U , il existe des déterminations continues du logarithme sur U .

PROP 42: Si $|z| < 1$, on a $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

THM 43: Soit $\alpha > 0$ et $\Delta_\alpha = \{re^{i\alpha} \mid r > 0\}$. On peut définir

une détermination continue du logarithme pour $\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha$ par: $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha$, $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in]\alpha; \alpha + 2\pi[$.

$\log_\alpha(z) = \ln(r) + i\theta$. $\log_\alpha$ est alors holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha$.

PROP 44: Il n'y a pas de détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

DEF 45: Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on définit z^α par:

$z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z))$.

PROP 46: $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et sa dérivée est $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \mapsto \alpha z^{\alpha-1}$.

III - Analyse complexe et analyse de Fourier

1) Etude de la fonction Γ [Rat] [Gov] [Z-Q]

DEF 47: Pour tout $x > 0$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ DEF 1

PROP 48: Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de plus log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

LEMME 49: (Euler) On a $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ $\forall x > 0$

THM 50: (Bohr-Mollerup) Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une solution de l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $f = \lambda\Gamma$.

REMS 1: Cette fonction généralise la factorielle:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n!$$

DEF 52: On définit pour $x, y > 0$, $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

PROP 53: $\forall x, y > 0$, $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

PROP 54: La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\omega = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

THM 55: A l'aide de la formule d'Euler (lemme 50), on peut prolonger Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

2) La fonction ζ [Z-Q]

PROP 56: La fonction $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est bien définie on l'appelle la fonction ζ de Riemann.

PROP 57: Pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe.

PROP 58: $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_1^N \frac{(t-L(t))}{t^{s+1}} dt$

On en déduit: $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$, $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} \right)$

On a même mieux:

THM 59: Il existe ζ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ telle que:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s), \eta \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1$$

$$I(s) = I(1-s) \text{ avec } I(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

3) Analyse de Fourier [ELAT]

DEF 60: Pour $f \in L^1_{\mathbb{T}}$, $m \in \mathbb{Z}$, on définit $c_m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt} dt$

DEF 61: On définit les noyaux de Dirichlet et de Fejér:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} \text{ et } K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N D_j(x)$$

PROP 62: $D_N(x) = \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}$, $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$

THM 63: Pour $f \in L^1_{\mathbb{T}}$, $\| \sigma_N(f) - f \|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ ou $\sigma_N = F_N * f$
Pour $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, $\| \sigma_N(f) - f \|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

DEF 64: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$

PROP 65: $\hat{f}$ est continue et $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} 0$

L'opérateur $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est linéaire continu.

$$\text{EX 66: } \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} e^{-|x|^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

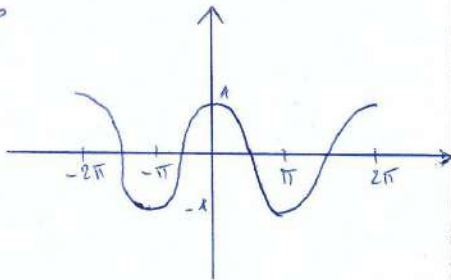
PROP 67: Soit $b > 0$, $\mathcal{F}(e^{-bx^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$ EX 2 SER 2

PROP 68: Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) g(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(v) \hat{g}(v) dv$

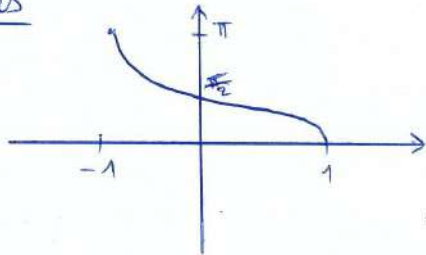
THM 69: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injectif.

ANNEXE: Courbes représentatives des fonctions

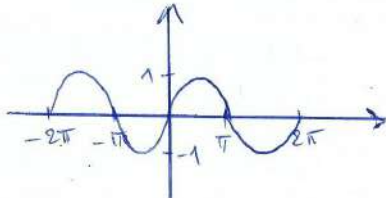
Fonction cosinus



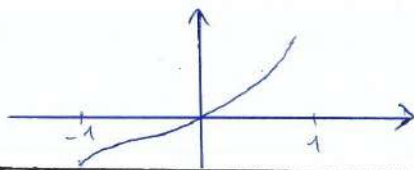
Fonction Arccosinus



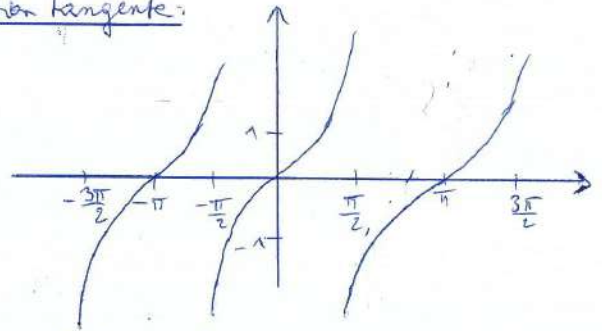
Fonction sinus



Fonction Arsinus



Fonction tangente



Fonction Arctangente

