

Leçon 243 : Séries entières. Propriétés de la somme Exemples et applications

Ouvrages : Gourdon, El Annani ; Francique (Exos maths Algèbre 4) ; Tassiel (Ana. Comp. pour la L3)

I - Généralités sur les séries entières

1) Rayon de convergence

Combes

a) Définitions et premières propriétés

b) Méthodes pratiques pour calculer le rayon de convergence

2) Opérations sur les séries entières

3) Séries entières dérivées et primitives

II - Fonctions et séries entières

1) Fonction somme

a) Continuité de la fonction somme

b) Intégration de la fonction somme

c) Dérivabilité de la fonction somme

2) Fonctions développables en séries entières

3) Méthode du DSE

4) Fonctions analytiques et séries entières

III - Applications

1) Série exponentielle

2) Séries génératrices et dénombrement

DEV 1 : Théorème d'Abel angulaire

DEV 2 : Nombres de Bell

Leçon 263: Séries entières - Propriétés de la somme Exemples et applications

I - Généralités sur les séries entières (SE)

1) Rayon de convergence

a) Définitions et premières propriétés

DEF 1: On appelle série entière l'expression de variable complexe toute série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ appelée suite des coefficients de la série entière.

REM 2: On peut aussi considérer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse au domaine de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$ sur lequel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge.

PROP 3: (Lemme d'Abel): Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une SE et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument (CM)
- $\forall r > 0, r < |z_0|, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement (CM) sur $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq r\}$.

THM 4: Il existe un unique nombre R tel que

- $\forall |z| < R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge
- $\forall |z| > R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge (R éventuellement infini)

DEF 5: R est élément $R \in \mathbb{R}^+$ s'appelle le rayon de convergence de la SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ [ANNEXE 1].

REM 6: On peut avoir $D(0, R) = \emptyset$ si $R = 0$ ou $D(0, R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$. L'ensemble $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ s'appelle le cercle d'unicité. Il est souvent difficile de prouver le comportement de la série sur ce cercle.

EX 7: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ vérifie: $R = 1$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverge

$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ vérifie $R = +\infty$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge

$\cdot \forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ vérifie $R = 1$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge

b) Méthodes pratiques pour calculer R le rayon de convergence

On considère $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec SE de rayon de convergence R . On pose $\frac{1}{R} = 0$ si $R = +\infty$ et $\frac{1}{R} = +\infty$ si $R = 0$.

PROP 8: (Règle de d'Alembert): Si la suite de terme général $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ converge vers $L \in \mathbb{R}^+$, alors $R = \frac{1}{L}$.

EX 9: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ vérifie $R = +\infty$.

REM 10: On ne peut pas toujours appliquer cette règle, par exemple pour $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

PROP 11: (Formule de Hadamard): Le rayon R est donné par $R = \frac{1}{L}$ où $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

EX 12: Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ est $R = \frac{1}{2}$.

PROP 13: Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux SE de rayons R_1 et R_2 . Si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|$, alors $R_1 \geq R_2$.

PROP 14: Avec les mêmes notations, si $a_n = O(b_n)$ (ou $a_n = o(b_n)$), alors $R_1 \geq R_2$.

EX 15: Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^n$ ont $R = 1$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq e^n$ on a que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

PROP 16: Si $a_n = b_n$, alors $R_1 = R_2$.

COR 17: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une SE telle qu'il existe une fonctionnelle non nulle F avec pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = F(n)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

2) Opérations sur les séries entières

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 .

DEF 18: On appelle série somme la SE $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$.

On vérifie que $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ converge pour tout z tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergent.

REM 19: L'ensemble des séries entières est un $\mathbb{C}$ -module commutatif.

THM 20: (i) Le rayon de convergence R de la série somme vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus, si $|z| < R$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ (ii) en multipliant $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ par $\lambda \neq 0$ on ne change pas le rayon de convergence. De plus, si $|z| < R_a$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n z^n)$.

(iii) Le rayon de convergence R de la série produit vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

EX 21: Le rayon R de la série somme et produit peut vérifier $R > \max(R_a, R_b)$. C'est le cas des séries $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$ ($R_a = R_b = 1$ mais $R = +\infty$). De même pour $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \geq 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \geq 0 \\ 2 & \text{si } n < 0 \end{cases}$. On a $R_a = R_b = 1$ et $R(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) = +\infty$.

3) Séries entières dérivées et primitives

DEF 22: On appelle série entière dérivée de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la SE $\sum_{n=1}^{\infty} (n a_n) z^{n-1}$.

PROP 23: La série entière dérivée d'une SE a le même rayon de convergence que celle-ci. Plus généralement, $\forall k \in \mathbb{Z}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a le même rayon que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

DEF 24: On appelle série entière primitive de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

PROP 25: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

EX 26: Pour $\theta \in \{\frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence 1.

II - Fonctions et séries entières

1) Fonction somme

THM 27: Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque ouvert de convergence.

THM 28: L'application $S: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

EX 29: On a vu que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ était convergente $\forall z \in \mathbb{C}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{C}$.

REM 30: Le théorème suivant donne un résultat de continuité de la fonction somme en un point du cercle d'encerclement.

THM 31: (Abel angulaire): Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une SE de rayon de convergence $R > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. On note la somme de cette SE sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in [0, \pi[$ fixé et $a_0 = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \text{ et } \exists p > 0, \exists \epsilon \in]0, \epsilon_0], z = 1 - p e^{i\theta_0}\}$. Alors $\lim_{z \rightarrow 1} S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ [ANNEXE 2].

THM 32: (Toucheur faible): Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une SE de rayon de convergence 1 et f la somme de cette SE sur $D(0,1)$. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. Si $a_n = o(\frac{1}{n})$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Intégration de la fonction somme

THM 33: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une SE complexe de variable réelle et $(a; b] \subset]-R, R[$ ($R > 0$). Alors $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx$ et $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$.

COR 34: La fonction somme S de la SE est continue sur $] -R, R[$ et ses primitives sont de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ avec $a_0 \in \mathbb{C}$.

EX 35: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1-x)$

(c) Dérivabilité de la fonction somme

THM 36: Sous les mêmes hypothèses que THM 33, soit de classe C^1 sur $] -R, R[$ et S est la fonction somme de la SE dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Sous les mêmes hypothèses, soit de classe C^k sur $] -R, R[$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R, R[, f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$.

EX 38: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ vérifie $R=1$ et $\forall x \in] -1, 1[, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

VR 39: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(n!)^k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

(2) Fonctions développables en série entière (DSE)

DEF 39: Soit $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est DSE en 0 lorsqu'il existe une SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et $n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

DEF 40: On dit que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est DSE en $x_0 \in X$ lorsque la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est DSE en 0.

REM 41: $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ est DSE en 0 et est égale à la somme de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur $] -1, 1[$.

PROP 4.2: Si une fonction f est DSE en x_0 , alors il existe un voisinage de x_0 au lequel f est de classe C^∞ et la DSE de f en x_0 est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$. (C'est la série de Taylor de f en x_0 .)

EX 4.3: Toute fonction polynomiale est DSE en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

REM 4.4: La PROP 4.2 donne l'unicité d'un DSE.

EX 4.5: La réciproque de la PROP 4.2 est fautive: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, toutes ses dérivées sont nulles mais $f(x) = e^{-x^2}$ n'est pas DSE en 0.

THM 4.6: $f:]-x; x[\rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ est DSE en 0 si et seulement si: $\exists \delta > 0, \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\delta; \delta[, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{C}{n!}$

3) Méthodes de DSE

Pour montrer qu'une fonction est DSE et trouver son développement, on peut:

- trouver une équation différentielle linéaire dont on a des coefficients polynomiaux telle que f soit la solution d'un problème de Cauchy associé à cette équation
- prévoir que f est DSE et en déduire son développement à l'aide de l'équation
- étudier la nature de la série obtenue: si elle est normale, la somme de la série sera solution du problème de Cauchy sur l'intervalle de convergence et sera donc égale à f dessus.

EX 4.7: Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère $f: x \in]-1; 1[\mapsto (1+x)^\alpha$. $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha-i) \right] x^n$

4) Fonctions analytiques et séries entières

DEF 4.8: On dit qu'une fonction f définie sur $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide est analytique lorsqu'elle est DSE en tout point de V .

EX 4.9: $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et $\forall z \neq 0, \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} (z \neq 0)$

NOT 5.0: On note $A(V)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur V .

THM 5.1: Si $\mathbb{D}_r(0) \subset U \subset \mathbb{C}$ et f est analytique sur $U \cap \mathbb{D}_r(0)$, alors f est analytique sur U .

THM 5.2: (Théorème de prolongement analytique) Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in A(V)$, $f \neq 0$, l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est fermé discret.

THM 5.3: (Principe du prolongement analytique) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in A(U)$. (H5.3.1) Si $f \equiv 0$ sur V (i.e) $f \equiv 0$ sur un voisinage de a , alors $f \equiv 0$ sur U .

COR 5.4: Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in A(U)$. Si f et g coïncident sur un voisinage d'un point de U , alors $f = g$.

THM 5.5: Soient $(\gamma:]0; 1[\rightarrow \mathbb{C})$ un chemin, fermé et $U = \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. Soit $z \in U$, on pose $\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z}$, l'indice de γ par rapport à z .

$\forall z \in U, \text{Im}(\gamma) \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \rightarrow \text{Ind}(\gamma, z)$ est constant sur chaque composante connexe de U , nulle sur la composante connexe non bornée de U .

THM 5.6: (Formule de Cauchy) Soit γ un chemin fermé dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, $z \in U \setminus \text{Im}(\gamma)$ et $f \in A(U)$.

Alors: $f(z) = \text{Ind}(\gamma, z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$

THM 5.7: On a $f \in A(U) \Leftrightarrow f$ est holomorphe sur U .

III - Applications

1) Séries exponentielle

DEF 5.8: On appelle série exponentielle complexe et on note $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction somme de la SE: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ qui est définie sur $\mathbb{C}$.

REM 5.9: $\forall y \in \mathbb{R}, e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$

PROP 6.0: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

THM 6.1: L'application $z \mapsto e^z$ est un morphisme continu surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Elle n'est cependant pas injective.

2) Séries géométriques et dérivées

REM 6.2: Les SE sont souvent utiles en dérivant.

EX 6.3: $(1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ donc $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m}{k} x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k \right)$

DEF 6.4: Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on appelle série géométrique de a la SE: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. On appelle $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ la somme de la SE.

DEV 2

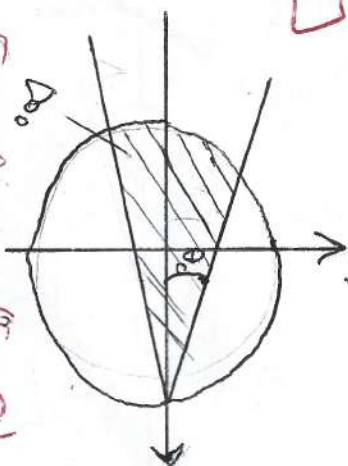
Application 6.5: (Nombres de Bell): Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose B_m le nombre de partitions de $\{1, \dots, m\}$ et $B_0 = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} e^x \Big|_{x=0}$

[ANNEXE 1]



[ANNEXE 2]



[ANNEXE 3] Formules: (Sur P.)

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad R=+\infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad R=+\infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad R=+\infty$$

$$\ln|x| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad R=1$$

$$\ln|1-x| = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad R=1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad R=1$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad R=1$$

$$\ln|x| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad R=1$$