

Leçon 241: Suites et séries de fonctions

Exemples et contre-exemples

Ouvrages: Gaudon, El Amaani (1 et 2), Hauchecorne, Briane-Pages
Combes

I - Convergence simple et convergence uniforme

- 1) Suites de fonctions
- 2) Séries de fonctions

II - Régularité et interversion de limites

- 1) Convergence uniforme et continuité
- 2) Convergence uniforme et dérivabilité
- 3) Convergence uniforme et intégrale de Riemann

III - D'autres modes de convergence: L^p et μ -p.p

IV - Séries de fonctions particulières

- 1) Séries entières
- 2) Séries de Fourier
- 3) Séries de fonctions holomorphes et produits infinis

DEV 1: Théorème de Riesz-Fischer

DEV 2: Théorème d'Abel angulaire

Leçon 24.1: Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Soit X un ensemble non vide et E un espace de Banach sur un corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E et $f: X \rightarrow E$.

I - Convergence simple et convergence uniforme

1) Suites de fonctions

DEF 1: On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X lorsque: $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n' \geq n, \|f_{n'}(x) - f(x)\| < \epsilon$

EX 2: La suite (f_n) définie par: $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n$ sur $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplement vers $f: x \in [0,1] \mapsto 0$.

DEF 3: On dit que la suite converge uniformément vers f sur X lorsque: $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n' \geq n, \forall x \in X, \|f_{n'}(x) - f(x)\| < \epsilon$

LEM 4: Le rang N que dépend pas de $x \in X$: à partir d'un certain rang, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$.

THM 5: (Critère de Cauchy uniforme): La suite (f_n) CVU vers f et seulement si: $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n' \geq n, \forall x \in X, \|f_{n'}(x) - f_n(x)\| < \epsilon$.

LEM 6: La CVU entraîne la CV.

EX 7: La suite $f_n: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n}x^n$ CVU vers 0 mais ne converge pas uniformément.

2) Séries de fonctions

DEF 8: On appelle série des fonctions f et on note $\sum f_n$ la suite (S_n) où S_n désigne l'application de X dans E définie par $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ (même remarque de f_n).

On dit que $\sum f_n$ CVU sur X lorsque (S_n) CVU sur X .

EX 9: La série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$.

DEF 10: On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur X lorsque $\forall x \in X, \sum \|f_n(x)\|$ converge.

PRO 11: Si $\sum f_n$ CVU sur X , alors $\sum f_n$ CVU sur X .

DEF 12: On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est bornée et $\sum \|f_n\|_b$ converge.

EX 13: Une série peut converger uniformément et absolument mais pas normalement. Par exemple: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ sur $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.

PRO 14: La convergence normale de $\sum f_n$ entraîne sa convergence uniforme.

II - Régularité et interversion de limites

1) Convergence uniforme et continuité

THM 15: On suppose que X est une partie d'un espace vectoriel normé et que $f_n: X \rightarrow E$ est continue sur X pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum f_n$ CVU vers f sur X , alors f est continue sur X .

EX 16: La suite (f_n) définie précédemment sur $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CVU vers 0 sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas continue donc la convergence n'est pas uniforme.

Les théorèmes suivants tiennent une réciproque possible au théorème 15.

THM 17: (Dini) a) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles définies et continues sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Si (f_n) CVU vers continue sur I , alors f_n CVU vers f sur I .

THM 18: (Polynômes de Bernstein): Soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $B_n(f): x \in [0,1] \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) (\frac{x}{n})^k (1-\frac{x}{n})^{n-k}$. Alors $(B_n(f))$ CVU vers f sur $[0,1]$.

THM 19: (Weierstrass): Toute fonction continue sur un segment admet une approximation uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

THM 20: (double limite): Soit X une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie F . Soit $f_n: X \rightarrow F$ tel que (f_n) CVU vers f sur X et (f_n) CVU vers g sur X . On suppose que $f_n \rightarrow g$ uniformément sur X .

Alors $f = g$ et f est continue sur X .

EX 21: L'hypothèse de CVU n'est pas superflue, en effet: Soit $f_n: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n}x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$ mais f_n ne converge pas vers 0 sur $\mathbb{R}$.

2) Convergence uniforme et dérivation

THM 22: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I à valeurs dans E . On suppose (f_n) CVS sur I et (f'_n) CVV sur I .

Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = g(x)$.

EX 23: Hypothèse (f'_n) CVV n'est pas superflue:

On prend $f_n: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ CVV sur $\mathbb{R}$ mais pas $f: x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

THM 23: Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables en x_0 et (f'_n) CVV sur I tel que $(f_n(x_0))$ converge.

Alors (f_n) CVV sur I et (f'_n) CVV sur I .

REMARQUE: On étend le théorème (nécessaire) en disant que si (f_n) est CVV et que (f'_n) est CVV, alors (f_n) CVV sur I et (f'_n) CVV sur I .

EX 25: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 26: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 27: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 28: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 29: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 30: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 31: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 32: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

EX 33: Soit (f_n) une suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (f'_n) CVV sur $\mathbb{R}$.

III - D'autres modes de convergence: L^p et L¹

Soit (X, μ) un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de même mesure μ .

DEF 30: On dit que (f_n) converge μ -presque partout (C.V.P.P.) vers f si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour presque tout x .

DEF 31: On dit que (f_n) converge vers f dans L^p (ou en moyenne) si $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

THM 32: (Lemme de Fatou): On suppose (f_n) à valeurs positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

THM 33: (Convergence dominée): Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que $f_n \rightarrow f$ C.V.P.P. et telle qu'il existe g positive et intégrable telle que $|f_n| \leq g$ et g intégrable.

Alors $\lim \int f_n = \int f$ et f est intégrable.

THM 34: Soit (f_n) une suite mesurable de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

THM 35: (Riesz-Fischer): Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 36: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 37: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 38: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 39: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 40: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 41: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 42: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

EX 43: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

THM 39: Soit $R = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$, a_n est bornée $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors R est l'unique nombre (éventuellement infini) tel que

1) $\sum |a_n| < R$, $\sum a_n$ CVA

2) $\sum |a_n| > R$, $\sum a_n$ ne converge pas

DEF 40: R s'appelle le rayon de convergence de la série entière et le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ s'appelle le disque ouvert de convergence de la série. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ est appelé le cercle d'accumulation.

REM 41: Il est en général difficile de trouver le comportement de la série sur le cercle.

$\sum a_n$ converge : $R = 1$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow \sum z^n$ diverge
 $\sum a_n$ diverge : $R = 1$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow \sum z^n$ converge

THM 42: (Abel angulaire) Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence $R > 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série au point 1 . Soit $z_0 \in [0, 1]$.

Alors $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. $[ANNEXE 1]$

THM 43: (Théorème de Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence $R = 1$ et f la somme de cette série sur $D(0, 1)$. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est fini et $a_n = o(\frac{1}{n})$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

EX 44: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

2) Séries de Fourier

Soit f 2π -périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$ (i.e. $f \in L^1$). **DEF 45:** Soit $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n -ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

DEF 46: Soit $f \in L^1$. On appelle série de Fourier de f la série formelle $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

On note $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$ la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f . On a $S_N(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_N(x-t) dt$ où $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$.

DEF 47: On définit le moyen de Dirichlet d'ordre N par $D_N = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$. On définit la moyenne de Fejér d'ordre N par $F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$. On a $\sigma_N(f) = F_N * f = f * F_N$.

DEF 48: On définit la moyenne de Fejér d'ordre N par $F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$. On a $\sigma_N(f) = F_N * f = f * F_N$.

THM 49 (Fejér): Si $f \in C$, alors $\|F_N * f - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ et $\|f\|_{\infty} \leq \|F_N * f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ et $\|F_N * f - f\|_p \rightarrow 0$ pour $1 \leq p < \infty$.

THM 50 (Riemann-Lebesgue): Si $f \in L^1$, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \|F_N * f - f\|_1 = 0$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|F_N * f - f\|_p = 0$ pour $1 < p < \infty$.

EX 51: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

THM 52 (Dirichlet): Soit f 2π -périodique et $f \in L^1$ par morceaux, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_1 = 0$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_p = 0$ pour $1 < p < \infty$.

COR 53: Si f est C^1 par morceaux et continue sur $[0, 2\pi]$, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_1 = 0$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_p = 0$ pour $1 < p < \infty$.

EX 54: Soit $g: x \in [-\pi, \pi] \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$. Alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(g) - g\|_1 = 0$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(g) - g\|_p = 0$ pour $1 < p < \infty$.

EX 55: Soit $g: x \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3) Séries de fractions rationnelles

THM 56 (Weierstrass): Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fractions rationnelles $\frac{p_n(z)}{q_n(z)}$ où $q_n(z) \neq 0$ sur $\mathbb{C}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \|p_n\|_1 < \infty$. Alors, il existe une fonction f holomorphe telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{q_n(z)} = f(z)$ et la fonction f est la limite de la suite $\sum_{n=0}^N \frac{p_n(z)}{q_n(z)}$.

EX 56: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

EX 57: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

EX 58: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

EX 59: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

EX 60: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

EX 61: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

EX 62: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

ANNEXE 1:

