

Léon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

Références : El Amrani (Fonction), Chaboud, Li (Int.), Courton, Tauvel
Queffelec, Queffelec (2009) (Int.)
(Anc. comp.)

I - Généralités sur les intégrales à paramètres

- 1) Sur la continuité
- 2) Sur la dérivabilité
- 3) Sur l'holomorphie
- 4) Comportement asymptotique

II - Convolution et transformation de Fourier

- 1) Convolution
- 2) Approximation de l'unité
- 3) Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$
- 4) Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

III - Applications

- 1) En analyse complexe
- 2) En probabilités

DEV 1 : Etude la fonction Gamma

DEV 2 : Injectivité de la TF

Leçon 239: Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

I - Généralités sur les intégrales à paramètre

Dans cette partie, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Sur la continuité [ELAT] [Li]

THM 1: On suppose que:

- (1) Pour tout $y \in I$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur X
- (2) Pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur I
- (3) Pour tout $K \subset X$ compact, il existe g_K intégrable positive sur X telle que pour tout $x \in X$ et tout $y \in K$, $|f(x, y)| \leq g_K(x)$

Alors $F: y \in I \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est définie et continue sur I .

REM 2: Dans le THM 1, on peut remplacer I par un espace métrique quelconque.

EX 3: La fonction $g: t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+x^2} dx$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

EX 4: La fonction $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Sur la dérivabilité [ELAT] [CHA] [RAM Ana]

THM 5: On suppose I ouvert.

- (1) Pour tout $y \in I$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable
- (2) Pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur I
- (3) Pour tout $K \subset I$ compact, il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que, pour tout x pour lequel $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable et pour tout $y \in K$, $|\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)| \leq g_K(x)$.

Alors, F est dérivable sur I et: $\forall y \in I, F'(y) = \int_X \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) d\mu(x)$

REM 6: Ce théorème se généralise pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{C}^\infty$.

EX 7: La fonction Γ d'Euler donnée par $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} dx$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^k dx$$

EX 8: Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors sa fonction caractéristique est $t \mapsto e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

3) Sur l'holomorphie [ELAT]

THM 9: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

- (1) pour tout $z \in \Omega$, $x \mapsto f(x, z)$ est intégrable
- (2) pour tout $x \in X$, $z \mapsto f(x, z)$ est holomorphe sur Ω
- (3) pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe une fonction g_K intégrable positive telle que pour tout $x \in X$, $z \in K$, $|f(x, z)| \leq g_K(x)$

Alors $F: z \in \Omega \mapsto \int_X f(x, z) d\mu(x)$ est holomorphe et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \Omega$, $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x, z) d\mu(x)$.

EX 10: La fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

4) Comportement asymptotique [GOU]

Soit $I = [a, b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ intégrables sur I .

Lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on a la tableau

	$f = O(g)$	$f = o(g)$	$f \sim g$
$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$	$\int_a^x f(t) dt = O(\int_a^x g(t) dt)$	$\int_a^x f(t) dt = o(\int_a^x g(t) dt)$	$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$
$\int_x^b f(t) dt \leq \infty$	$\int_x^b f(t) dt = O(\int_x^b g(t) dt)$	$\int_x^b f(t) dt = o(\int_x^b g(t) dt)$	$\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$

EX 11: Au voisinage de $+\infty$, on a pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x-a}\right)$ donc $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = o\left(\int_1^x \frac{t^{a-1}}{t} dt\right) = o(x^a)$

EX 7 (suite): Γ est bien définie, $\mathcal{C}^\infty$, log-concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. De plus, on a $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

II - Convolution et transformation de Fourier

1) Convolution [ELAT] [CHA]

DEF 12: On dit que deux fonctions f et g sont convolables, lorsque pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f et g par:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$$

PROP 13: Soient f et g convolables. Alors $\operatorname{Supp}(f * g) \subset \operatorname{Supp}(f) + \operatorname{Supp}(g)$.

THM 14: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors f et g sont convolables, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

THM 15: Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
 • Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors f et g sont convolables, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

• Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $f * g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

REM 16: La convolution munit $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ d'une structure d'algèbre de Banach.

REM 17: La somme de deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g a pour densité $f * g$.

THM 18: Soient $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Si f ou g est à support compact, alors $f * g$ est partout dérivable, de classe $\mathcal{C}^k$. De plus, $\forall k \in [0, p]$, $\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} (f * g) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} * g$, $i \in \{1, \dots, d\}$.

2) Approximation de l'unité [ELAM]

PROP 19: L'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ est sans unité.

DEF 20: On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ toute suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ telles que:

(1) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j = 1$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \varphi_j(x) dx = 0$.

REM 21: Une fonction mesurable φ_j vérifiant (1) est appelée une densité de probabilité.

EX 22: On a par exemple $\varphi_j(x) = \frac{1}{2} e^{-j\|x\|}$ (laplace), $\varphi_j(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+j^2 x^2}$ (Cauchy) et $\varphi_j(x) = \frac{1}{2j} e^{-\frac{|x|^2}{2j}}$.

THM 23: Soit $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(1) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$.

(2) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ($p \in [1, +\infty[$) ($f * \varphi_j$) _{$j \geq 1$} converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

LEMME 24: $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B}(0, \varepsilon)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x) dx = 1$.

REM 25: De telles fonctions permettent de construire des fonctions plateaux. Elles permettent aussi de montrer:

THM 26: L'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ($p \in [1, +\infty[$).

3) Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [ELAM]

DEF 27: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier par $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixs} dx$.

PROP 28: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. L'opérateur $\mathcal{F}: f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est linéaire continu.

LEMME 29: (Riemann-Lebesgue) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ existe et on a $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \hat{f}(s) = 0$.

EX 30: Soit $\rho: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Alors $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{\rho}(s) = \frac{1}{1+s^2}$. On a $\hat{\rho} \in L^1(\mathbb{R})$.

EX 31: Soit $f = 1_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$. On a: $\hat{f}(s) = \int_a^b e^{-ixs} dx = \frac{e^{-ias} - e^{-ibs}}{-is} = \frac{e^{-ias} (1 - e^{-i(b-a)s})}{-is}$ $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

PROP 32: Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$. **DEF 1**

PROP 33: Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon: x \mapsto e^{-\varepsilon|x|^2}$. Alors $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}_\varepsilon: s \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{s^2}{4\varepsilon}}$.

PROP 34: Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(u) g(u) du$.

THM 35: L'opérateur $\mathcal{F}: f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est injectif.

THM 36: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) e^{ixs} ds$.

4) Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ [ELAM]

THM 37: (Plancherel-Parseval) Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

THM 38: (Fourier-Plancherel) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors:

(1) Il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

(2) Pour une telle suite (f_n) , la suite $(\hat{f}_n)$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\hat{f}$ indépendante de (f_n) .

DEF 39: La limite $\hat{f}$ ainsi définie est appelée la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$.

PROP 40: Cette définition étend la définition dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} = \hat{f}$.

THM 41: Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors fg et $f\bar{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} f(u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}} f(v)\bar{g}(v)dv$

THM 42: Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $fg = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}\hat{g}$ et $\hat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f}\hat{g}$.

PROP 43: Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $fg \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f}\hat{g}$.

DEF 44: On appelle opérateur de Fourier-Plancherel l'opérateur $P: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$
THM 45: L'opérateur de Fourier-Plancherel est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ d'inverse $P^{-1} = P$.

III - Applications

1) Application à l'analyse complexe [TAU]

DEF 46: Soit γ un chemin fermé et $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ où $\gamma^* = \text{Im}(\gamma)$. On définit $\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z}$ = $\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$ l'indice de z par rapport à γ .

THM 47: L'application $z \mapsto \text{Ind}_{\gamma}(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

EX 48: Soit γ un arc (a, a) orienté positivement. On a $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ si $|z-a| > r$ et $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$ si $|z-a| < r$.

THM 49 (Cauchy): Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur Ω et $a \notin \gamma$ continue sur Ω .

Alors:
(1) f admet une primitive: $\exists F \in H(\Omega)$, $F'(z) = f(z)$
(2) Pour tout γ chemin fermé tel que $\gamma^* \subset \Omega$, $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

THM 50 (Résidus): Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ des points deux à deux distincts de U et $f \in H(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k ,
 $\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum \text{Ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k)$.

EX 51: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ ($a > 1$)

2) Application aux probabilités [CHA] [QUE (mul)]

DEF 52: Soit $(X_n)_n$ nœm une suite de variables aléatoires. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{L} X$ lorsque: $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$

DEF 53: Soit X une variable aléatoire. On définit sa fonction caractéristique par: $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = E[e^{itX}]$

REM 54: Ceci permet de voir la fonction de caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X . Elle existe toujours car $|e^{itX}| = 1$ et P_X est une mesure bornée.

LEMME 55: $X_n \xrightarrow{L} X \iff \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), E[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(X)]$

THM 56: $(X_n)_n \xrightarrow{L} X \iff \phi_{X_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_X$ simplement

THM 57 (Limite Centrale): Soit $(X_n)_n$ nœm une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable. On pose $X_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$, $m = E[X_1]$ et $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X_1)}$

$\frac{X_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{L} Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.