

Leçon 236: Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

Références: Gourdon, Briane-Pages, Rombaldi, Tauvel, Queffelec,
Demathy, Chabaud. (ou Li-integret*) (DEV 1) (Dev2)

I - Méthodes directes de calculs d'intégrales

- 1) Calculs de primitives
- 2) Intégration par parties
- 3) Changement de variables

II - Méthodes indirectes

- 1) Problèmes d'inversion
- 2) Analyse complexe
- 3) Analyse de Fourier

III - Méthodes d'approximation

- 1) Quelques méthodes de quadrature
- 2) Approche probabiliste

DEV 1: Etude de la fonction Γ

DEV 2: Intégrale par la méthode des résidus

2^e Concl²: Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Méthodes directes de calculs d'intégrales

1) Calculs de primitives [GOV] sur $[a; b]$

DEF 1: Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Une primitive de f est une fonction F dérivable de dérivée f sur $[a; b]$.

PROP 2: Deux primitives F et G de f diffèrent d'une constante

THM 3: Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle. Pour $a < b$ donc on a $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f .

EX 4: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2}$

METHODE 5: Soit f une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$. Pour calculer une primitive de f , on commence par décomposer f en éléments simples sur $\mathbb{R}$. On est ainsi amené à calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^h}$ ($h \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}$ ($c^2-4d < 0$)

EX 6: Une primitive de $x \mapsto \frac{1-x}{x^2+x+1}$ est de la forme:
 $x \mapsto \frac{2}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} \right)$

METHODE 6: Pour calculer une primitive de $x \mapsto \sin^m(x) \cos^n(x)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, deux cas se présentent:

- Si m ou n est impair, disons $m=2p+1$, on a $\sin^m(x) \cos^n(x) = \sin^{2p}(x) (1-\sin^2(x))^p \cos(x)$ puis on effectue le changement de variable $t = \sin(x)$
- Si m et n sont pairs, on linéarise avec la formule d'Euler.

METHODE 7: Les fonctions de type "polynôme $\times$ exponentielle" se primitivent sous la forme "polynôme $\times$ exponentielle"

METHODE 8: Les primitives des fractions rationnelles en e^x se calculent en posant $t = e^x$

2) Intégration par parties [GOV]

THM 9: Soient $u, v: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors: $\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$

REM 10: Ce théorème est souvent utilisé pour calculer des intégrales de produits de fonctions.

EX 11: Une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x \ln(x) - x$

EX 12: L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est semi-convergente.

EX 13: (Intégrales de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad \text{et} \quad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

3) Changement de variables [GOV] [BRI]

THM 14: Soit $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\varphi([a; b]) \subset I$. Alors $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$

REM 15: En conjuguant le THM 14 et la relation de Charles, on obtient:

- Si $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et paire, alors on a $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$. Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et T -périodique, alors $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.

METHODE 16: Pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $R(\sin(x), \cos(x))$ où R est une fraction rationnelle de deux variables, on effectue le changement de variables $t = \tan(\frac{x}{2})$ pour se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

REM 17: Si $R(\sin(x), \cos(x)) dx$ reste inchangé en changeant:

- x par $\pi - x$, on pose $t = \sin(x)$
- x par $-x$, on pose $t = \cos(x)$
- x par $\pi + x$, on pose $t = \tan(x)$

EX 18: Une primitive de $x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x - 2 \operatorname{Arctan}(x)$

THM 19: Soient U, V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^N$, $\varphi: U \rightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Alors, pour tout $f: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable positive, on a $\int_U f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx = \int_V f(y) dy$. De plus, si $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, f est intégrable sur V si et seulement si $(f \circ \varphi) |J_\varphi|$ est intégrable sur U et (φ) est encore valable.

APPLI 20: (Changement de variable polaire) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Alors, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

II - Méthodes indirectes

1) Problèmes d'interpolation [GOU] [BRI] ($\mathcal{R}, F, \mu$) un espace mesuré

DEF 21: Soit X un ensemble, (E, d) un espace métrique, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f: X \rightarrow E$ lorsque:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
 $\sum f_n$ converge uniformément (CVU) lorsque $(\sum_{n=0}^N f_n)_{N \in \mathbb{N}}$ CVU

THM 22: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a, b], K)$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors, f est continue et on a:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

COR 23: Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues de $[a, b]$ dans K qui converge normalement sur $[a, b]$, alors $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_a^b g_n(t) dt)$

APPLI 24: Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Cette série converge normalement sur tout compact du disque ouvert de convergence donc une primitive de $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est $F: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

THM 25: (Convergence monotone) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$

THM 26: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ et telles qu'il existe g intégrable sur X telle que: $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ μ -p.p. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

THM 27: Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f: I \times X \rightarrow K$ telle que pour tout $u \in I, f(u, \cdot) \in L^1(\mu)$, $u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur I pour presque tout $x \in X$ et: $\forall g \in L^1(\mu), \forall u \in I, |\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)| \leq g(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$. Alors $F: u \in I \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est définie et dérivable sur I de dérivée $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x)$ DEV 1

PROP 28: La fonction $\Gamma: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, log-concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle vérifie de plus $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

THM 29: (Euler) On a $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ pour tout $x > 0$

THM 30: (Fubini-Tonelli) Soient $f: (X, \mathcal{F}, \mu) \times (Y, \mathcal{G}, \nu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable, μ et ν σ -finies sur $(X, \mathcal{F})$ et $(Y, \mathcal{G})$. Alors $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont mesurables. $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x) = \int_Y (\int_X f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y)$

THM 31: (Fubini-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ alors les deux fonctions précédentes sont dans L^1 et on a toujours l'égalité.

APPLI 32: Avec Fubini et un changement de variables polaire, on peut calculer l'intégrale de Gauss: $\forall a > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

2) Analyse complexe [TAU]

DEF 33: On appelle chemin la donnée d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et d'une application $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On note $\gamma^* = \text{Im}(\gamma)$ le support de γ .

DEF 34: Soit $([a, b], \gamma)$ un chemin et f continue sur γ^* . L'intégrale de f le long de γ est: $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

THM 35: Soit $([a, b], \gamma)$ un chemin fermé ($\gamma(a) = \gamma(b)$). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, on définit l'indice de z par rapport à γ par: $\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-\zeta} d\zeta$. Ind $_{\gamma}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, nulle sur celle non bornée.

EX 36: Soit γ un cercle (a, r) orienté positivement. Alors: $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ si $|z-a| > r$ et $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$ si $|z-a| < r$.

THM 37 (Résidus) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ n points deux à deux distincts de U et $f \in H(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_j est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé dans U tel que pour tout j , $a_j \notin \gamma^*$, on a:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(a_j) \text{Res}(f, a_j)$$

Si $\text{Res}(f, a_j)$ est le résidu de f en a_j .

REV 2

APPLI 38: On peut par exemple calculer, pour $\alpha > 1$, $I_{\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}} dx = \frac{\pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})}$

3) Analyse de Fourier [FLAM]

PROP 39: L'opérateur de transformation de Fourier:

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$f \mapsto \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

est correctement défini, linéaire et continu.

EX 40: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$

PROP 41: Soit $f_{\lambda}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mapsto e^{-\lambda|x|^2}$ ($\lambda > 0$). Alors, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f_{\lambda})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}$

THM 42: Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(g)(x) dx$

THM 43: L'opérateur $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$ est injectif.

THM 44: Pour $f \in L^2_{\mathbb{R}}$, la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge en norme 2 vers f . On a alors par Parseval:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \text{ dans } L^2_{\mathbb{R}} \text{ et } \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

THM 45: Si $f \in \mathcal{C}_0^{\infty}$ et si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on a $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$

APPLI 46: En calculant $c_n(f)$ avec $f: \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$

$\frac{\pi}{2}$ -périodique et en utilisant THM 45, on trouve que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

III - Méthodes d'approximation

1) Quelques méthodes de quadrature [DEF]

DEF 47: Pour approcher $\int_a^b f(x) dx$, on choisit une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On a $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$

La méthode de quadrature consiste à approcher:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^p \omega_j f(\xi_{ij})$$

EX 48: Rectangle à gauche: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$

• Trapèzes: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \left(\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1})\right) (x_{i+1} - x_i)$

• Simpson: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{4}{6} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_{i+1})\right) (x_{i+1} - x_i)$

2) Approche probabiliste [CHA]

THM 49: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. intégrable. Alors (LFCN) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E[X_1]$

THM 50: (Monte-Carlo) Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $U([0, 1])$. Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int_0^1 f(x) dx$