

Leçon 235: Problèmes d'intervention en analyse

Références: El Amrani 1 et 2, Gourdon, Briane - Pagès, Francoulet, Chabrand (Probes)

I - Intervention entre limites

- 1) Convergence uniforme
- 2) Continuité et double limite
- 3) Dérivabilité

II - Intervention's limites - intégrales

- 1) Convergence sous l'intégrale
- 2) Intégrales à paramètres

III - Intervention d'intégrales

- 1) Théorèmes de Eubini
- 2) Applications en analyse de Fourier

IV - Intervention en probabilités

V - Intervention de quantificateurs et techniques de Baire

DEV 1: Equation de la chaleur

DEV 2: Banach-Skinner et série de Fourier divergente en 0.

Leçon 235: Problèmes d'intervention de symboles en analyse.

I - Intervention entre limites

1) Convergence uniforme [ELAM 1] [GOV]

DEF 1: Soit (f_n) une suite de fonctions entre 2 evm E et F . On dit que (f_n) converge uniformément (CVU) sur E lorsque: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in E, \|f_n(x) - f(x)\|_F < \epsilon$.

REM 2: Graphiquement, si $E = F = \mathbb{R}$, f_n CVU vers f signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel le graphe de f_n est compris entre celui de $f - \epsilon$ et celui de $f + \epsilon$.

DEF 3: Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de E dans F . On dit que $\sum f_n$ CVU sur E lorsque la suite des sommes partielles (S_n) CVU sur E .

REM 4: Tous les résultats concernant la CVU pour les suites sont vrais pour les séries.

PROP 5: Si (f_n) converge uniformément sur X vers f , alors elle converge simplement sur X vers f .

EX 6: La réciproque est fautive: $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+x^2}$ CVS vers 0 mais f_n ne converge pas unif vers f .

THM 7: (Critère de Cauchy uniforme) Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans F avec E complet. Alors (f_n) CVU vers f si et seulement si: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in X, \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \epsilon$.

DEF 8: On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X si et seulement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

PROP 9: Si $\sum f_n$ CVU sur X et E complet, alors $\sum f_n$ CVU sur X .

EX 10: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CVU sur $[0, 1]$.

2) Continuité et double limite [ELAM 1] [GOV]

THM 11: Soit E un evm et (f_n) une suite de fonctions de X dans F . Soit $a \in E$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a et que (f_n) CVU sur un voisinage de a vers f . Alors, f est continue en a .

COR 12: Toute suite de fonctions continues uniformément convergente sur E admet une limite continue sur E .

EX 13: $f_n: x \mapsto e^{-nx}$ CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f: x \mapsto 0$ donc f est continue.

THM 14 (de la double limite): Soit E et F deux evm complets et $X \subseteq E$. Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans F . On suppose que (f_n) CVU vers f sur X . Soit $a \in X$. Si pour tout n , f_n admet une limite l_n en a , alors (l_n) converge vers l et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Donc $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

THM 15 (Dini): Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues et définies sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Si (f_n) CVS vers f continue alors f_n CVU vers f .

Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues sur $[a, b]$ convergent simplement vers f continue sur $[a, b]$. Alors (f_n) CVU vers f .

THM 16 (Abel angulaire): Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence > 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette SE sur $D(0, 1)$. On fixe $0_+ \in]0, 1[$ et on pose $\Delta_{0_+} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \exists p > 0, \exists \theta \in]-\theta_+, \theta_+[, z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$. Alors $\lim_{z \rightarrow 0_+} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3) Dérivabilité [GOV]

THM 17: Soient E un evm, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I à valeurs dans E . On suppose que (f_n) CVS vers f sur I et que (f'_n) CVU sur tout segment de I . Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

REM 18: La CVU des dérivées n'est pas superflue ($\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$) CVU vers $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

THM 19: Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans E d'un evm complet. On suppose que:

- $\exists x_0 \in [a, b]$ $f_n(x_0)$ converge
- La suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers g

Alors (f_n) CVU vers f sur $[a, b]$, f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

REM 20: En appliquant par récurrence ce théorème, on en déduit qu'une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^p$ telle que pour tout $k \in [0, p]$, la suite $(f_n^{(k)})$ CVU vers g_k , converge uniformément vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^p$ qui vérifie $f^{(k)} = g_k$.

PROP 21: La somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence.

EX 22: La fonction $\zeta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^s}$.

REM 23: Il existe des fonctions continues nulle part dérivables comme $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

THM 24: (Weierstrass) Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers f . Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

II - Intégration limites - intégrales (FLAN) [BRI]

1) Convergence sous l'intégrale

THM 25: Soit (f_n) une suite uniformément convergente de fonctions intégrables sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans E de Banach. Alors $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

THM 26 (Lemme de Fatou): Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $0 \leq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \infty$.

EX 26: $L^p(\mathbb{R}^n)$ est complet pour tout $p \in [1, \infty]$.

THM 27 (de convergence dominée): Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telle que $f_n \leq g$ et telle qu'il existe g intégrable telle que $\forall n \geq 1, |f_n| \leq g$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$.

THM 28 (Beppo Levi): Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives tel qu'il existe $K \in \mathbb{R}$, $\sup_n \int_X f_n \leq K$. Alors $\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

EX 29: $\int_0^1 (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$ si $\alpha > 1$.

THM 30: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors
 • Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq 0$, $\int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$
 • Si $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty$, alors $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu < \infty$.

2) Intégrales à paramètres (BRI)

THM 31 (Continuité sous l'intégrale): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f: I \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- $\forall t \in I, x \mapsto f(t, x)$ est mesurable
- $\forall x \in X, t \mapsto f(t, x)$ est continue en $t \in I$.

Il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $\forall t \in I, |f(t, x)| \leq g(x)$. Alors $F: t \mapsto \int_X f(t, x) d\mu$ est définie en tout point $t \in I$ et continue sur I .

EX 32: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

EX 33: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue bornée. Alors $f * u: u \mapsto \int_{\mathbb{R}} u(u-x) f(x) dx$ est continue bornée.

THM 34 (Dérivation sous l'intégrale): Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert non vide. Soit $f: I \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- $\forall u \in I, f(u, \cdot) \in L^1(\mu)$
- $\forall u \in I, \frac{\partial}{\partial x} f(u, x)$ existe
- $\exists g \in L^1(\mathbb{R}), \forall u \in I, |\frac{\partial}{\partial x} f(u, x)| \leq g(x), \mu(dx) \text{ p.p.}$

Alors $F: u \in I \mapsto \int_X f(u, x) d\mu$ est définie et dérivable sur tout l'intervalle I , de dérivée $F'(u) = \int_X \frac{\partial}{\partial x} f(u, x) d\mu(x)$.

EX 35: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et ψ dérivable bornée et ψ' bornée sur $\mathbb{R}$ alors $f * \psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}, (f * \psi)'(u) = (f * \psi')(u)$.

APPLICATION 36: Soit $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle continue $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et 2π -périodique. L'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $u(0, x) = u(x)$ possède une unique solution u est 2π -périodique continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. [FRA 4]

THM 37 (Holomorphie sous l'intégrale): Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert non vide et $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

- $\forall z \in \Omega, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω
- $\forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x)$ est intégrable sur X
- $\forall K \subset \Omega$ compact, $\int_K$ intégrable tel que $\forall z \in K, |f(z, x)| \leq g(x)$

Alors $F: z \in \Omega \mapsto \int_X f(z, x) d\mu$ est bien définie et holomorphe sur Ω .

EX 38: La fonction $\Gamma: z \in \mathbb{C} \mapsto \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $P = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

III - Inversion d'intégrales (BR)

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finies.

THM 39 (Fubini - Tonelli) : Soient $f: (X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

a) Les fonctions partout définies $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont respectivement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ -mesurables.

$$b) \int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

THM 40 (Fubini - Lebesgue) : Avec les mêmes notations, soit $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Alors :

a) μ -p.p. $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \in L^1(\nu)$

$\Rightarrow (y) \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \in L^1(\nu)$

b) $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \in L^1(\nu)$ ces fonctions étant définies μ -p.p. et ν -p.p.

c) $\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

EX 41 : Soit $f: \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{1}{2} e^{-xy} - e^{-xy}$

On a $\int_0^1 f(x, y) dy = 0$ et $\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}$

Donc l'hypothèse d'intégrabilité sur $X \times Y$ est importante.

EX 42 : Calcul de l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

EX 43 : Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

EX 44 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt$

Alors si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

De plus, on a la formule de dualité (ou de change)

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(v) g(v) dv$$

• La transformée de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ est injective

IV - Inversion en probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X, Y deux variables aléatoires sur Ω .

On note F_X la fonction de répartition de X .

DEF 45 : On dit que X et Y sont indépendantes et on note $X \perp Y$ lorsque $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$

THM 46 : X, Y sont indépendantes si et seulement si $P_{X,Y} = P_X \otimes P_Y$.

REM 47 : Ceci se généralise par récurrence à n variables aléatoires. De même pour les résultats suivants :

PROP 48 : Si $X \perp Y$ et f, g sont deux fonctions boréliennes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

THM 49 : $X \perp Y$ si et seulement si pour tout couple f, g de fonctions boréliennes, on a $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$

COR 50 : Si $X \perp Y$, $E[XY] = E[X]E[Y]$

PROP 51 : $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ si X et Y sont indépendantes.

PROP 52 : On suppose $X \perp Y$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t)$ où Φ désigne la fonction caractéristique.

(Li) IV - Inversion de quantificateurs et techniques de Baire

THM 53 (Lemme de Baire) : Dans un espace métrique complet, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.

THM 54 (Lemme équivalent) : Si X est un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X .

DEV 2

THM 55 (Banach-Steinhaus) : Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé, et soit $T_i: E \rightarrow F$ des applications linéaires continues (i.e. $\mathbb{I}$) telles que :

$$\sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i\| \leq \infty \quad \forall x \in E. \text{ Alors } \sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i\| \leq \infty$$

En d'autres termes, s'il existe, pour chaque $x \in E$, un nombre $C_x > 0$ tel que $\|T_i x\| \leq C_x \|x\| \quad \forall i \in \mathbb{I}$.

Alors : $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in E, \forall i \in \mathbb{I}, \|T_i x\| \leq C \|x\|$.

EX 56 : Il existe $f \in C_{2\pi}$ continue 2π -périodique tel que sa série de Fourier diverge en 0.

COR 57 : Soient E et F deux Banachs et $T_n: E \rightarrow F$ une suite d'applications linéaires continues telle que $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = T x$ Alors $\sup_n \|T_n\| < \infty$, T est linéaire continue. De plus, $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$