Leçon 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, les définitions et premiers exemples de référence sont incontournables. Lorsque des "règles" de convergence sont présentées, celles-ci doivent être illustrées d'exemples consistants.
Le sujet ne se limite pas à la seule étude de la convergence d'une série, l'estimation des sommes partielles ou des restes (où la technique de comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est particulièrement efficace), et ses conséquences (comme l'étude asymptotique de certaines suites récurrentes) font partie intégrante du sujet.
L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à quelques procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 230 intitulée : "Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.". Certaines quantités ne sont connues que comme limites, souvent sous forme de séries : raffinements successifs, oscillations, évaluations de fonctions développables en série, formule de Taylor, etc. il convient donc d'étudier ces objets pour en connaître un peu mieux le comportement.
Dans une première partie on s'intéresse aux généralités sur les séries en commençant par parler de convergence et de propriétés élémentaires. À cet effet, on commence par rappeler la définition d'une série numérique convergente et on donne des résultats sur les suites des sommes partielles et des restes avant de donner la définition d'une série télescopique et de faire le lien entre la convergence d'une suite et d'une série. On termine cette partie en donnant la définition d'une série absolument convergente ainsi que le théorème 9 et la proposition 10. Dans un deuxième point on parle de quelques espaces de séries convergentes avec tout d'abord les espaces ℓ_∞ et c_0 qui sont des espaces complets avant de passer au cas des espaces ℓ_p qui sont également complets. On conclut finalement cette partie en abordant l'espace c_{00} et en en donnant quelques résultats de densité.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux séries à termes positifs avec des critères de convergence. Tout d'abord on donne des théorèmes de comparaison avec inégalités puis avec o, O et $\sim$ avant de donner les théorèmes de comparaison série-intégrale. Dans un deuxième point on énonce les règles classiques de convergence : c'est-à-dire la règle de d'Alembert qui est aussi très pratique dans le cadre des séries entières, puis le critère ainsi que la règle de Cauchy. On termine avec une dernière partie sur les sommations des relations de comparaison qui sont résumés dans un tableau récapitulatif ainsi que le théorème de Cesàro.
Dans une troisième partie on donne des résultats généraux avec tout d'abord le cas des séries alternées. On commence par en rappeler la définition ainsi que le critère spécial des séries alternées avant de donner un exemple. On passe ensuite au cas du produit de Cauchy en commençant par énoncer le théorème et en donnant un exemple. Cet exemple montre que, plus généralement, les produits de Cauchy apparaissent naturellement dans certains problèmes et le théorème 36 permet alors d'en calculer la somme. Il est également possible d'affaiblir légèrement les hypothèses du théorème de Cauchy et l'on obtient alors le théorème de Mertens.
On termine cette leçon avec une dernière partie consacrée à des exemples et applications. Tout d'abord on s'intéresse aux séries entières où l'on commence par définir ce qu'est une série entière ainsi qu'un rayon de convergence avant de parler de calcul de rayon de convergence et de convergence absolue et normale ainsi que du théorème d'Abel angulaire et du théorème taubérien faible qui sont des résultats de continuité et qui traitent de l'épineux problème de la convergence sur le bord du disque de convergence. On étudie dans un deuxième point la formule d'Euler-Maclaurin en introduisant les nombres et polynômes de Bernoulli ainsi que quelques unes de leurs propriétés et la

formule d'Euler-Maclaurin qui est une formule particulièrement efficace et redoutable pour obtenir des développements asymptotiques. En effet, elle permet (sans trop de peine) de trouver un développement asymptotique de la série harmonique à la précision $\frac{1}{n^r}$ alors que celui à la précision $\frac{1}{n}$ était très laborieux à obtenir... Enfin, on s'intéresse aux séries de Fourier dont on commence par rappeler quelques définitions. Les séries de Fourier sont aussi très utiles car il existe beaucoup de modes de convergences différents et le théorème de Parseval ou de Dirichlet permettent alors d'obtenir des valeurs de sommes qui ne sont pas évidentes au premier regard .

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et les suites et séries seront de terme général réel ou complexe.

I Généralités

I.1 Convergence et propriétés élémentaires

Définition 1 : Série numérique (convergente) [Deschamps, p.404] :
On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
On dit alors que $\sum u_n$ est une **série convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers une limite finie dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2 : [Deschamps, p.405]
Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 3 : [Deschamps, p.405]
La suite des restes d'une série convergente tend vers 0.

Définition 4 : Série télescopique [Deschamps, p.406] :
On dit que $\sum u_n$ est une **série télescopique** lorsque le terme général peut s'écrire sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$.

Proposition 5 : [Deschamps, p.406]
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente.
Dans ce cas, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_0$.

Proposition 6 : [Deschamps, p.406]
∗ L'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
∗ L'application qui, à une série convergente associe sa somme, est une application linéaire.

Remarque 7 : [Deschamps, p.406]
Attention, on ne peut rien dire a priori sur le somme de deux séries divergentes !

Définition 8 : Série absolument convergente [Deschamps, p.407] :
On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la séries à termes réels positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 9 : [Deschamps, p.407]
Toute série absolument convergente est convergente.

Proposition 10 : [Deschamps, p.408]
Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

I.2 Espaces de suites

Définition 11 : Les espaces $\ell_\infty(\mathbb{N})$ et $c_0(\mathbb{N})$ [Hassan, p.319] :
On note $\ell_\infty(\mathbb{N})$ l'espace $\left\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tq } \forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathbb{K} \text{ et } \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty\right\}$.
On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace $\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tq } \forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathbb{K} \text{ et } \lim_{k\to+\infty} x_k = 0_{\mathbb{K}}\}$.

Théorème 12 : [Hassan, p.321]
$*$ $\left(\ell_\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace de Banach.
$*$ $c_0(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ qui est fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
$*$ $\left(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace de Banach.

Définition 13 : Les espaces $\ell_p(\mathbb{N})$ [Hassan, p.319] :
On note $\ell_p(\mathbb{N})$ l'espace $\left\{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tq } \forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p\right\}$.

Proposition 14 : Inégalités de Hölder [Hassan, p.319] :
Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$*$ Pour $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p et q sont des **exposants conjugués**), on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.
$*$ Pour $p = 1$ et $q = +\infty$, on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k y_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k| \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$.

Théorème 15 : [Hassan, p.321]
Pour tout $p \in [1; +\infty[$, $\left(\ell_p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace de Banach.

Proposition 16 : [Hassan, p.321]
Soient $1 < p < q < +\infty$.
On a les inclusions suivante : $\ell_1(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_p(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_q(\mathbb{N}) \subsetneq c_0(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_\infty(\mathbb{N})$.
De plus, lorsqu'elles sont définies, on a les inégalités suivantes entre les normes :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1$$

Définition 17 : L'espace $c_{00}(\mathbb{N})$ [Hassan, p.319] :
On note $c_{00}(\mathbb{N})$ l'espace $\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tq } \forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathbb{K} \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall k > N,\ x_k = 0\}$.

Proposition 18 : [Hassan, p.323]
$*$ Pour $p \in [1; +\infty[$, c_{00} est dense dans $\ell_p(\mathbb{N})$. $*$ c_{00} est dense dans c_0.
$*$ c_{00} n'est pas dense dans ℓ_∞.

II Séries à termes positifs

Dans toute cette partie, les séries considérées seront à termes réels.

II.1 Comparaison

Proposition 19 :
Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :
$*$ Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
$*$ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 20 : Comparaison logarithmique [Deschamps, p.409] :
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Si, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont strictement positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = O(v_n)$ et donc :
$*$ Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
$*$ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 21 : [Deschamps, p.409]
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs strictement positives, alors :
$*$ S'il existe $k \in [0; 1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, alors $\sum u_n$ converge.
$*$ Si à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Théorème 22 : [Deschamps, p.412]
Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0; +\infty[$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$).
La série $\sum_{n\geq n_0+1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)$ converge.

Exemple 23 : [Deschamps, p.413]
La convergence de la série $\sum \left(\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}\right)$ permet de montrer l'existence de la constante γ d'Euler.

Théorème 24 : Théorème de comparaison série-intégrale [Deschamps, p.413] :
Soit f une fonction continue par morceaux positive et décroissante sur $[n_0; +\infty[$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$).
La série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

II.2 Règles classiques

Proposition 25 : Règle de D'Alembert [Deschamps, p.410] :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives telle que $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors :
$*$ Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
$*$ Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 26 : [Deschamps, p.410]
La série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge si, et seulement si, $x \in]-4;4[$.

Proposition 27 : Critère de Cauchy [Ramis, p.504] :
La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, on a la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, p \in \mathbb{N},\ (n, p \geq N) \implies \left(\left| \sum_{k=n}^{p} u_k \right| \leq \varepsilon \right)$$

Proposition 28 : Règle de Cauchy [Ramis, p.576] :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et L la limite supérieure de la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$.
$*$ Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
$*$ Si $L > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
$*$ Lorsque $L = 1$, on ne peut rien dire à priori.

Remarque 29 : [Ramis, p.577]
La règle de Cauchy est "plus puissante" que la règle de D'Alembert car à chaque fois qu'on peut appliquer la règle de D'Alembert, celle de Cauchy s'applique.

II.3 Utilisation des équivalents

Dans toute cette sous-partie, on considère une série $\sum v_n$ à termes positifs.

On a le tableau récapitulatif suivant :

	$u_n = o(v_n)$	$u_n = O(v_n)$	$u_n \sim v_n$
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \sum_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$	$R_n(u) = o(R_n(v))$	$R_n(u) = O(R_n(v))$	$R_n(u) \sim R_n(v)$
$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$	$S_n(u) = o(S_n(v))$	$S_n(u) = O(S_n(v))$	$S_n(u) \sim S_n(v)$

Exemple 30 : [Deschamps, p.415]
On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème 31 : Théorème de Cesàro :
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $M_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$, alors :
$*$ Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ, alors $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ.
$*$ Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.

III Des résultats généraux

III.1 Séries alternées

Dans toute cette partie, on considère $\sum u_n$ une série à termes réels.

Définition 32 : Série alternée [Deschamps, p.411] :
On dit que $\sum u_n$ est une **série alternée** lorsque la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Proposition 33 : Critère spécial des séries alternées [Deschamps, p.411] :
Une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 est convergente et sa somme est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives.
De plus, le reste R_n est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. En particulier, la somme de la série est du signe de u_0.

Exemple 34 : [Deschamps, p.411]
$*$ Pour $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge. Cependant elle ne converge absolument que pour $\alpha > 1$.
$*$ Pour $x \in \mathbb{R}^+$, le reste d'ordre n de la série $\sum \frac{(-1^n}{(n+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Remarque 35 : [Deschamps, p.411]
Une série alternée ne converge pas nécessairement même si son terme général tend vers 0. La décroissance en valeur absolue de son terme général est essentielle !
En effet, la série dont le terme général est donné par $u_{2n} = \frac{1}{2^n}$ et $u_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$ diverge.

III.2 Produit de Cauchy

Théorème 36 : Produit de Cauchy [Deschamps, p.477] :
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes absolument convergentes.
La série de terme général $\sum_{p+q=n} a_p b_q$ (appelée **produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$**) est absolument convergente et on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

Exemple 37 : [Deschamps, p.477]

Pour $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et la série est absolument convergent, on a donc :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} z^p z^q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

Remarque 38 : [Deschamps, p.477]

Les hypothèses de convergence absolue des deux séries est essentiel dans le théorème précédent comme le montre l'exemple de la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
Cependant, la convergence d'une des deux séries et la convergence absolue de l'autre suffisent comme le montre le théorème suivant.

Théorème 39 : Théorème de Mertens [Deschamps, p.489] :

Soient $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente $\sum b_n$ un série complexe convergente.
La série de terme général $\sum_{p+q=n} a_p b_q$ est absolument convergente et on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

IV Exemples et applications

IV.1 Séries entières

Définition 40 : Série entière [Deschamps, p.601] :

On appelle **série entière associée à** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum f_n$ où chaque $f_n : z \longmapsto a_n z^n$ est définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Lemme 41 : Lemme d'Abel [Deschamps, p.602] :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq |z_0|$, la série $\sum a_n z_0^n$ est absolument convergente.

Définition 42 : Rayon de convergence [Deschamps, p.602] :

On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$, la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ et on la note R.

Proposition 43 : [Deschamps, p.603]

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.
* Si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
* Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Proposition 44 : Règle de d'Alembert [Deschamps, p.606] :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain n_0 assez grand et que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ possède une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple 45 : [Deschamps, p.604]

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Proposition 46 : Règle d'Hadamard [Ramis, p.577] :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Le rayon de convergence de cette série entière est donné par $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Exemple 47 : [Ramis, p.577]

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 + (-1)^n$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$, donc par la règle d'Hadamard, on a $R = 1$.

Théorème 48 : [Deschamps, p.610]

La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0,\rho)$ où $\rho \in [0; R[$.

Développement 1 : [cf. GOURDON]

Théorème 49 : Théorème d'Abel angulaire [Gourdon, p.263 + 264] :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge et de somme notée f sur le disque unité.
Si on fixe $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et que l'on pose :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0; \theta_0] \text{ tq } z = 1 - \rho e^{i\theta}\right\}$$

alors on a : $\lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 50 : [Gourdon, p.264]

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Théorème 51 : Théorème taubérien faible [Gourdon, p.264] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n})$ et s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$, alors $\sum a_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

IV.2 Formule d'Euler-Maclaurin

Définition 52 : Nombres de Bernoulli [Gourdon, p.319] :
La fonction $z \longmapsto \frac{z}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r > 0$.
On appelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **nombres de Bernoulli** telle que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\},\ \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

Définition 53 : Polynômes de Bernoulli [Gourdon, p.319] :
La fonction $z \longmapsto \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r > 0$.
On appelle $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **polynômes de Bernoulli** telle que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\},\ \frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

Proposition 54 : [Gourdon, p.319]
On a les propriétés suivantes :
$*$ $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$. $\quad *$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.
$*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0$. $\quad *$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1}$.
$*$ $\forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1)$. $\quad *$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n+1} = 0$.

Proposition 55 : [Gourdon, p.319]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} z^k$ et $b_n \in \mathbb{Q}$.
En particulier, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$ et $b_6 = \frac{1}{42}$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\widetilde{B_n} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 1-périodique, qui coïncide avec B_n sur $[0;1[$.

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Proposition 56 : Formule d'Euler-Maclaurin [Gourdon, p.321] :
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ $(m < n)$ et $f : [m;n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$.
On a la relation :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h}{h!}\left(f^{(h-1)}(n) - f^{(h-1)}(m)\right) + R_r$$

avec $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \widetilde{B_r}(t) f^{(r)}(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 57 : [Gourdon, p.321]
Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r} \frac{(-1)^{r-1} b_h}{hn^h} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

IV.3 Séries de Fourier

Définition 58 : Coefficient de Fourier [El Amrani, p.173] :
On considère $n \in \mathbb{Z}$.
On appelle n**-ième coefficient de Fourier de** f (noté c_n) le nombre complexe défini par :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Définition 59 : Série de Fourier [El Amrani, p.178] :
On appelle **série de Fourier de** f la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\cdot}$.

Théorème 60 : Théorème de Parseval [El Amrani, p.193] :
Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Exemple 61 : [El Amrani, p.210]
En considérant la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Théorème 62 : Théorème de Dirichlet [El Amrani, p.196] :
Soient $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si f possède une limite à gauche et à droite en x_0 et possède une dérivée à gauche et à droite en x_0, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Exemple 63 :
On considère $a \in]0;\pi[$ et la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \mathbb{1}_{[-a;a]}(x)$.
On a l'identité $\frac{\pi-a}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n}$.

Remarques sur le plan

— Il faut être à l'aise sur les méthodes pour pouvoir effectuer les premiers exemples.

— On peut parler de séries semi-convergentes, de convergence inconditionnelle (théorème d'Orlicz, etc.) ainsi que de transformation d'Abel.

Liste des développements possibles

— Formule d'Euler-Maclaurin.

— Théorème d'Abel angulaire.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Jean-Pierre Ramis, *Mathématiques, Tout-en-un pour la licence 2*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.