Références : • FGN Algèbre 3
• Perrin
• Audin
• Serre - Matrices

NOM : PANEL Prénom : Grégoire Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Autre sujet :

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$ muni de son produit scalaire, et de sa norme $\|\cdot\|$ associée. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de ses endomorphismes, muni de la norme subordonnée $|||\cdot|||$. On note $GL(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

I) Définitions et premières propriétés

1.1) Adjoint

Prop 1 : $\forall u \in \mathcal{L}(E), \exists ! v \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$\forall x, y \in E : \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid v(y) \rangle$

Déf 2 : L'endomorphisme v, noté u^* est l'adjoint de u

Prop 3 : Si M est la matrice de u dans une base orthonormée, alors la matrice de u^* dans la même base est ${}^tM$.

Prop 4 : $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(uv)^* = v^* u^*$
$u \mapsto u^*$ est linéaire
$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u)^* = P(u^*)$
$(u^*)^* = u$
$|||u||| = |||u^*|||$

Prop 5 : L'orthogonal d'un sous-espace propre de u est stable par u^*.

Déf 6 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$: u symétrique $\Leftrightarrow u^* = u$
u antisymétrique $\Leftrightarrow u^* = -u$
u isométrie $\Leftrightarrow u^* u = Id_E$
u normal $\Leftrightarrow u^* u = u u^*$

1.2) Projecteurs orthogonaux

Déf 7 : $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal ssi p projecteur, et $E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(p - Id_E)$

Prop 8 : p projecteur, alors sont équivalents :
i/ p projecteur orthogonal
ii/ p symétrique
iii/ $|||p||| \leq 1$
iv/ $|||p||| = 0$, ou $|||p||| = 1$

Prop 9 : p et q projecteurs orthogonaux, alors sont équivalents :
i/ $pq = qp$
ii/ pq est un projecteur
iii/ pq est un projecteur orthogonal
iv/ Il existe une base orthonormale de diagonalisation commune à p et q

Application 10 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||u||| \leq 1$. Alors :
• $E = \mathrm{Ker}(u - Id_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - Id_E)$
• La suite $v_p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} u^k$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(v - Id)$

1.3) Symétries orthogonales

Déf 11 : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale ssi s symétrie, et $E = \mathrm{Ker}(s - Id_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(s + Id_E)$

Prop 12 : s symétrie, alors sont équivalents :
i/ s symétrie orthogonale
ii/ s symétrique

DVP 1

Déf 13: Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie orthogonale
- Si $\dim(\mathrm{Ker}(s + Id_E)) = 1$, s est une réflexion
- Si $\dim(\mathrm{Ker}(s + Id_E)) = 2$, s est un retournement

Prop 14: Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie, alors sont équivalentes :
i/ s est une réflexion
ii/ $\exists x \in E \mid \|x\| = 1$, et $s = Id_E - 2p_x$, où p_x est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)^\perp$.

1.4) Endomorphismes symétriques / antisymétriques

Définition 15: On note $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ les ensembles des endomorphismes symétriques, et antisymétriques de $\mathcal{L}(E)$.

Prop 16: On munit $\mathcal{L}(E)$ du produit scalaire : $(u,v) = \mathrm{Tr}(u^* v)$. Alors : $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont des sev de $\mathcal{L}(E)$, et :
$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}(E)$$

Prop 17: $\dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathcal{A}(E)) = \frac{n(n-1)}{2}$

Prop 18: $\varphi : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \langle u(x) \mid y \rangle \end{array}$, avec $u^* = u$, est une forme bilinéaire, symétrique.

Déf 19: u est dit positif / défini positif / négatif / défini négatif ssi φ l'est. Les espaces correspondants sont notés $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $\mathcal{S}^-(E)$, $\mathcal{S}^{--}(E)$

Rq 20: Ces espaces sont convexes

Prop 21: $\begin{cases} u \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow u^* u \in \mathcal{S}^+(E) \\ u \in \mathcal{GL}(E) \Rightarrow u^* u \in \mathcal{S}^{++}(E) \end{cases}$

1.5) Isométries

Prop 22: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalents :
i/ u isométrie
ii/ $\forall x, y \in E$, $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$
iii/ $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$
iv/ u transforme une BON en BON

Prop 23: u isométrie $\Leftrightarrow$ u conserve les distances

Prop 24: L'ensemble des isométries est un groupe compact. On le note $O(E)$ (groupe orthogonal)

Prop 25: $\det(u) \in \{-1; 1\}$

Ex 26: Les symétries orthogonales sont des isométries, mais pas les projections orthogonales [illegible]

Déf 26': $SO(E) = \{ O \in O(E) \mid \det(O) = +1 \}$

Prop 26'': $SO(E)$ est un ss groupe distingué de $O(E)$.

1.6) Endomorphismes normaux

Prop 27: $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{A}(E)$, $O(E)$ sont inclus dans l'ensemble des endomorphismes normaux

Prop 28: $u \in \mathcal{L}(E)$, alors sont équivalentes :
i/ u normal
ii/ $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$
iii/ $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

$\longrightarrow$ Dans la partie suivante, on identifie les éléments de $\mathcal{L}(E)$ à leurs matrices associées dans une BON de E donnée. Par ailleurs, si b est une base de E, alors $\mathrm{Mat}_b(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_b(u)$

II/ Réduction

2.1) Réduction des endomorphismes normaux

Prop 29: Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale, alors $\exists O$ orthogonale tq OMO^{-1} est diagonale par blocs, les blocs diagonaux de taille 1×1 ou 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$: blocs uniques à transposition près, avec $b \neq 0$.

Cor 30: Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale $\Leftrightarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tq $M^* = P(M)$

2.2) Réduction des endomorphismes symétriques et antisymétriques

Cor 31: Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, M est diagonalisable dans une base orthonormale.

Appli 31: $\begin{cases} M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(M), \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \\ M \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(M), \lambda \in \mathbb{R}^{+} \end{cases}$

Appli 32: $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists! N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $N^2 = M$, N est appelée racine de M.

Appli 33: Décomposition polaire : $\forall M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $\exists! A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $O \in O_n(\mathbb{R})$ tq : $M = AO$

Cor 34: Si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, M est semblable à une matrice M' de la forme :
$$M' = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & m_1 & \\ 0 & & & & \ddots \; m_r \end{pmatrix}$$
où $\forall i \in [\![1, r]\!]$, m_i s'écrit $m_i = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{bmatrix}$, où $\theta_i \in \mathbb{R}^*$,
ceux-ci sont uniques à transposition près

3/3

2.3) Réduction des isométries

Cor 35 : Si $O \in O_n(\mathbb{R})$, O est semblable à une matrice O' de la forme :

$$O' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in [1;r]$, $\varepsilon_i \in \{-1;1\}$, $\forall j \in [1;s]$, R_{θ_j} s'écrit $R_{\theta_j} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}$ avec $\theta_j \neq 0[\pi]$, et les $\{\varepsilon_i\}_{1\leq i\leq r}$ et $\{R_{\theta_j}\}_{1\leq j\leq s}$ sont uniques à transposition près.

Application 36 : Classifications des isométries du plan et de l'espace

DVP 2 [**Application 37 :** $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective

III) Étude de $O(E)$

3.1) Propriétés topologiques

Def 38 : $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$
$= \{ v \in O(E) \mid \det(v) = -1 \}$

Rq 39 : $O^-(E)$ n'est pas un groupe

Rq 40 : Si $u \in O^-(E)$, alors $O^-(E) = u.SO(E)$

Prop 41 : $O(E)$ admet 2 composantes connexes : $SO(E)$ et $O^-(E)$.

Prop 42 : L'enveloppe convexe de $O(E)$ est la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ (pour $|||.|||$), et $O(E)$ est l'ensemble de ses points extrémaux.

3.2) Propriétés algébriques

Prop 43 : $SO(E)$ simple pour $n=3$

Rq 44 : $SO(E)$ non simple pour n pair

Rq 45 : [non démontré] $SO(E)$ simple pour tout n impair.

Rq 46 : Pour $n \geq 2$, $O(E)$ non commutatif

Prop 47 : Pour $n=2$, $SO(E)$ commutatif
Pour $n>2$, $SO(E)$ pas commutatif

Prop 48 : Pour $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel,
$SO(E) = \left\{ u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x,y \in E \ u(x\wedge y) = u(x)\wedge u(y),\ u \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \right\}$

3.3) Générateurs

Prop 49 : • $O(E)$ est engendré par les réflexions
• $O \in O(E)$ est engendré par au plus n réflexions

Cor 50 : • Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements
• Pour $n \geq 3$, $O \in SO(E)$ est engendré par au plus n renversements.

Erratum : 3.3) doit être la première partie de III)