Leçon 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Les définitions et premières propriétés liées à ces notions doivent bien sûr être présentées pour pouvoir aborder les questions de limites et de continuité de ces fonctions et leurs caractérisations à l'aide de leurs dérivées. Il convient d'illustrer son exposé par de nombreux dessins.
La convexité est une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. Dans ce même domaine, l'étude des fonctions de répartition de variables aléatoires réelles, fonctions croissantes s'il en est, est une piste intéressante.
Au delà de la dimension 1, les fonctions convexes définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ font partie de cette leçon. La recherche de leurs extrema constitue une thématique riche d'exemples.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à des questions de dérivabilité des fonctions monotones, ou de continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 229 intitulée : "Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.". La monotonie est une propriété forte de rigidité dès que l'on a une notion d'ordre. Les fonctions convexes, primitives des fonctions croissantes, amplifient cette rigidité. On s'intéresse donc dans cette leçon à la forte régularité de telles fonctions et aux résultats qui en découlent.
Dans un premier temps, on s'intéresse aux fonctions monotones et on commence par rappeler les premières définitions et propriétés. On rappelle ainsi la définition d'une fonction (strictement) croissante/décroissante ainsi qu'un lien avec l'injectivité et la structure d'espace qui s'en dégage. On étudie ensuite les limites d'une fonction monotone sur le bord de son ensemble de définition. Dans un deuxième point on regarde la régularité des fonctions monotones en étudiant tout d'abord les éventuelles discontinuités, puis la continuité ainsi que la bijectivité. Ceci montre bien que les fonctions monotones sont assez contraignantes car donnent des résultats puissants. On conclut ce point avec le parallèle très utile en pratique entre la monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée. On fait un dernier point où l'on donne des applications avec tout d'abord un théorème de Dini puis les fonctions à variations bornées où l'on énonce la définition ainsi que les principaux résultats.
Dans un deuxième temps, on parle des fonctions convexes en commençant par rappeler les définitions de base dans une première sous-partie avant de passer au cas des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ avec une caractérisation par l'épigraphe puis l'inégalité des pentes. On donne ensuite un lien entre la convexité et la fonction dérivée ainsi que la dérivée seconde (lorsqu'elles sont bien définies) qui est très utile en pratique pour étudier la convexité d'une fonction. On termine enfin cette sous-partie avec deux résultats d'optimisation avant de passer au cas des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ avec comme résultat majeur la caractérisation d'une fonction convexe par la hessienne positive.
On termine cette leçon avec une dernière partie consacrée à quelques applications avec tout d'abord les inégalités de convexité qui sont surtout utilisées comme des outils de majoration ou de minoration, et notamment les propositions 47 et 54. On étudie ensuite la fonction Γ d'Euler dans un deuxième point en donnant quelques propriétés de base ainsi que le théorème de Bohr-Mollerup. On donne ensuite une autres application avec le processus de Galton-Watson : on rappelle ainsi brièvement la définition d'une série génératrice ainsi que le fonctionnement d'un processus de Galton-Watson avant de démontrer quelques résultats sur ce dernier. Finalement, on conclut cette leçon par la méthode de Newton qui permet d'approcher les solutions d'une équation lorsque celle-ci ne possède pas de solution explicite.
On trouvera également en annexe une représentation graphique d'une fonction convexe, de l'inégalité des pentes ainsi que l'allure de Γ et de G ainsi que ses points fixes.

Plan général

Cours détaillé

I Fonctions monotones

Dans toute cette partie, on considère $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Fonction croissante/décroissante [Deschamps (1), p.36] :

$*$ f est dite **(strictement) croissante** sur $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ (x < y) \implies (f(x) \leq (<) f(y))$$

$*$ f est dite **(strictement) décroissante** sur $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ (x < y) \implies (f(x) \geq (>) f(y))$$

Définition 2 : Fonction (strictement monotone) [Deschamps (1), p.36] :

f est dite **(strictement) monotone** lorsque f est (strictement) croissante ou décroissante.

Exemple 3 : [Deschamps (1), p.37]

$*$ La fonction $x \longmapsto ax + b$ est monotone (croissante quand $a \geq 0$ et décroissante quand $a \leq 0$).
$*$ La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

Théorème 4 : [Deschamps (1), p.515]

La fonction f est injective si, et seulement si, f est strictement monotone.

Proposition 5 : [Deschamps (1), p.36]

Soient g et h deux applications à valeurs réelles et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
$*$ Si g et h sont croissantes, alors $g + h$ est croissante.
$*$ Si g est croissante, alors λg est croissante.
$*$ Si g est strictement croissante et h croissante, alors $g + h$ est strictement croissante.
$*$ Si g et h sont positives, alors gh est positives.
$*$ Si g et h sont (strictement) monotones, alors $g \circ h$ est (strictement) monotone.

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone [Deschamps (1), p.507] :

Si f est monotone et que I est de la forme $]a;b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$), alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Corollaire 7 : [Deschamps (1), p.507]
Si f est croissante et que I est de la forme $]a;b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$), alors f admet une limite finie à droite en a si, et seulement si, f est minorée.

I.2 Régularité des fonctions monotones

Proposition 8 : [Rombaldi (1), p.299]
Si f est monotone, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exemple 9 : [Rombaldi (1), p.754]
On considère X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X (notée F_X) est croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0;1]$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et l'ensemble des points de discontinuité de F_X est au plus dénombrable.

Théorème 10 : [Rombaldi (1), p.299]
Si f est une fonction monotone, alors f est continue si, et seulement si, $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 11 : Théorème de la bijection [Deschamps (1), p.515] :
Si f est continue et injective, alors f définit une bijection de I sur $J = f(I)$, f est strictement monotone et l'application réciproque f^{-1} est continue, strictement monotone et de même monotonie que f.

Théorème 12 : [Deschamps (1), p.564]
Si f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors :
* f est croissante si, et seulement si, f' est positive sur $\mathring{I}$.
* f est décroissante si, et seulement si, f' est négative sur $\mathring{I}$.
* f est constante si, et seulement si, f' est nulle sur $\mathring{I}$.

Proposition 13 : [Deschamps (1), 565]
Si f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors :
* Si $f' > 0$ sur $\mathring{I}$, alors f est strictement croissante.
* Si $f' > 0$ sur $\mathring{I}$ et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

Exemple 14 : [Deschamps (1), p.565]
* La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
* La fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cependant sa dérivée s'annule en 0 (la proposition précédente ne donne donc qu'une condition suffisante).
* Les fonctions $x \longmapsto \frac{x^3}{x^2+1}$ et $x \longmapsto x - \sin(x)$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

Théorème 15 : [ADMIS]
Si f est monotone, alors f est dérivable presque-partout.

I.3 Applications

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $I = [a;b]$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

Théorème 16 : Théorème de Dini [Rombaldi (1), p.304] :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues et croissantes de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction continue f, alors la convergence est uniforme.

Exemple 17 : [Rombaldi (1), p.304]
La suite de fonctions $\left(x \longmapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $x \longmapsto e^x$ est uniforme sur tout segment de la forme $[-c;c]$.

Définition 18 : Fonctions à variations bornées [Gourdon, p.118] :
On dit que f est une **fonction à variations bornées** lorsqu'il existe $K > 0$ tel que pour toute subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ de I on ait $\sum_{j=0}^{n-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)| \leq K$.
On note alors $v(f)$ la plus petite constante réalisant l'inégalité précédente.

Exemple 19 : [Gourdon, p.118]
* Toute fonction monotone bornée est à variations bornées.
* La fonction $x \longmapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas à variations bornées.

Proposition 20 : [Gourdon, p.118]
Soit $c \in I$.
f est à variations bornées sur I si, et seulement si, f est à variations bornées sur $I \cap]-\infty; c]$ et $I \cap [c; +\infty[$.
Auquel cas, on a alors $v(f) = v(f|_{I\cap]-\infty;c]}) + v(f|_{I\cap[c;+\infty[})$.

Proposition 21 : [Gourdon, p.118]
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors f est à variations bornées et on a $v(f) = \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t$.

Théorème 22 : [Gourdon, p.118]
f est une fonction à variations bornées sur I si, et seulement si, il existe deux fonctions $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes et bornées telles que $f = g - h$.

Corollaire 23 :
Si f est à variations bornées sur I, alors f est dérivable presque-partout.

II Fonctions convexes

II.1 Définitions générales

Dans toute cette sous-partie, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, C une partie convexe de E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Définition 24 : Fonction (strictement) convexe [Deschamps (2), p.158] :
f est dite **(strictement) convexe** sur C lorsque pour tout $(x,y) \in C^2$ et tout $\lambda \in [0;1]$ on a $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (<) \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Définition 25 : Fonction (strictement) concave [Deschamps (2), p.158] :
f est dite **(strictement) concave** sur C lorsque la fonction $-f$ est (strictement) convexe sur C.

Exemple 26 : [Deschamps (2), p.159]
∗ Toute fonction affine est convexe sur $\mathbb{R}$.
∗ La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

Définition 27 : Épigraphe [Deschamps (2), p.160] :
On appelle **épigraphe de** f l'ensemble $\left\{(x,y) \in E^2 \text{ tq } x \in C \text{ et } f(x) \leq y\right\}$ et on le note $\mathcal{E}(f)$.

II.2 Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$

Dans toute cette partie, on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on considère une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 28 : [Deschamps (2), p.159]
La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous points A_1 et A_2 du graphe de f d'abscisses respectives x_1 et x_2, le graphe de $f|_{[x_1;x_2]}$ est en dessous de la corde $[A_1; A_2]$ (cf. annexe 1).

Proposition 29 : [Deschamps (2), p.159]
Si f est convexe sur $I = [a;b]$ et $f(a) = f(b)$, alors pour tout $x \in [a;b]$ on a $f(x) \leq f(a)$.

Exemple 30 : [Deschamps (2), p.159]
∗ La fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
∗ La fonction $x \longmapsto x^3$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 31 : [Deschamps (2), p.160]
Soient g et h deux fonctions convexes.
∗ Si g et h sont définies sur I, alors $g+h$ est une fonction convexe mais gh ne l'est pas nécessairement.
∗ Si g est définie sur J et croissante et h est définie de I dans J, alors $g \circ h$ est convexe.

Proposition 32 : [Deschamps (2), p.160]
f est convexe sur I si, et seulement si, son épigraphe l'est aussi.

Proposition 33 : Inégalité des pentes [Deschamps (2), p.161] :
Si f est convexe sur I, alors on a :

$$\forall (x,y,z) \in I^3,\ (x<y<z) \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Remarque 34 : [Deschamps (2), p.161]
∗ Ces inégalités s'expriment en terme de pentes de droites (cf. annexe 2).
∗ La propriété précédente est en fait une équivalence.

Proposition 35 : [Deschamps (2), p.162]
f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction :

$$\varphi_a : \left| \begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

est croissante.

Exemple 36 : [Deschamps (2), p.162]
On considère p et q deux réels.
La fonction $g : x \longmapsto f(x) - px - q$ est convexe si, et seulement si, f est convexe.
En effet, les fonctions φ_a correspondant à f et à g diffèrent de la constante p.

Proposition 37 : [Deschamps (2), p.163]
Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est convexe si, et seulement si, f' est croissante sur I.

Exemple 38 : [Deschamps (2), p.163]
∗ On retrouve le fait que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
∗ La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Une fonction convexe peut ne pas être dérivable (comme la fonction valeur absolue par exemple), néanmoins on a le résultat suivant :

Proposition 39 : [Deschamps (2), p.163]
Soit $a \in \mathring{I}$.
Si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite et à gauche au point a et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.
En particulier, f est continue en tout point intérieur de I.

Corollaire 40 : [Deschamps (2), p.164]
Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe si, et seulement si, f'' est positive.

Théorème 41 : [Rombaldi (1), p.347]
Si f est convexe sur I et dérivable en $\alpha \in \mathring{I}$ avec $f'(\alpha) = 0$, alors elle admet un minimum global en α.

Théorème 42 : [Rombaldi (1), p.347]
Si f est convexe sur I et admet un minimum local en $\alpha \in I$, alors ce minimum est global en α.

II.3 Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette sous-partie, on considère C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 43 :
f est convexe sur C si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in C^2$ on a $\varphi_{x,y}$ définie sur $[0; 1]$ par $\varphi_{x,y}(t) = f(tx + (1-t)y)$ est convexe.

Théorème 44 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Si f est différentiable sur $\mathcal{U}$, alors f est convexe si, et seulement si, pour tout $(x, a) \in \mathcal{U}^2$, $f(x) \geq f(a) + df_a(x-a)$.

Théorème 45 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Si f est deux fois différentiable sur $\mathcal{U}$, alors f est convexe si, et seulement si, pour tout $(a, h) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, $d^2 f_a(h, h) \geq 0$.
Autrement dit, f est convexe si, et seulement si, la hessienne de f est positive.

Exemple 46 :
La fonction $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

III Applications

III.1 Inégalités de convexité

Proposition 47 : Inégalité de Jensen [Deschamps (2), p.160] :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.
On a l'inégalité :

$$\forall (x_1, ..., x_p) \in I^p, \; f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Exemple 48 : [Deschamps (2), p.161]
Par convexité de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \; \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Proposition 49 : Inégalité de Young [Deschamps (2), p.164]
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
On a alors l'inégalité : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Proposition 50 : Inégalité arithmético-géométrique [Deschamps (2), p.164] :
Soient $x_1, ..., x_n$ des réels positifs et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
On a alors l'inégalité : $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
En particulier, on obtient l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Proposition 51 : [Deschamps (2), p.164]
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f(a) = f(b) = 0$ et que f'' est bornée par une constante M sur $[a; b]$, alors pour tout $x \in [a; b]$ on a $|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

Proposition 52 : [Deschamps (2), p.164 + 165]
$*$ Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I, alors on a :

$$\forall (x, a) \in I^2, \; f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$$

$*$ Si f est une fonction concave et dérivable sur un intervalle I, alors on a :

$$\forall (x, a) \in I^2, \; f(x) \leq f(a) + (x-a)f'(a)$$

Remarque 53 : [Deschamps (2), p.165]
Le résultat précédent peut s'interpréter en disant que le graphe d'une fonction convexe (respectivement concave) dérivable et situé au-dessus (repsectivement au dessous) de chacune de ses tangentes.

Proposition 54 : [Deschamps (2), p.165]
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$. $*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x-1$.
$*$ Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

III.2 Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Développement 1 : [cf. GOURDON (1)]

Proposition 55 : [Gourdon (1), p.315]
$*$ Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
$*$ La fonction Γ est log-convexe sur $]0;+\infty[$.
$*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
$*$ On a $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Lemme 56 : Formule d'Euler-Gauss [Gourdon (1), p.315] :
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Théorème 57 : Théorème de Bohr-Mollerup [Rombaldi (2), p.366] :
Si une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifie :
$*$ f est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. $*$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = xf(x)$.
$*$ $f(1) = 1$
Alors f coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction Γ.

III.3 Processus de Galton-Watson

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi notée μ admettant une espérance notée m, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X=k)$ et on suppose que $p_0 \in]0;1[$.

Définition 58 : Série génératrice [Deschamps (2), p.949] :
On appelle **série génératrice de** X la fonction G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de X. On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction la probabilité d'extinction à l'instant n, $P_{\text{ext}} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction de la population et G_n la fonction génératrice de Z_n.

Développement 2 : [A] [cf. GOURDON (2)]

Lemme 59 : [Gourdon (2), p.345]
$*$ G est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0;1]$.
$*$ G est strictement croissante sur $[0;1]$.
$*$ G est strictement convexe sur $]0;1]$ si, et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

Proposition 60 : [Gourdon (2), p.376]
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ \dots \circ G$ (n fois), avec G la série génératrice de X.
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
$*$ De plus, on a : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.

Développement 3 : [B] [cf. GOURDON (2)]

Théorème 61 : [Gourdon (2), p.376]
$*$ P_{ext} est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur $]0;1]$.
$*$ Si $m \leq 1$ (cas sous-critique et critique), alors $P_{ext} = 1$.
$*$ Si $m > 1$ (cas super-critique), alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

III.4 Résolution approchée d'équations : la méthode de Newton

On considère $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $f' > 0$ sur $[a;b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé.

Pour trouver le point $c \in [a;b]$ tel que $f(x) = 0$, on va l'approcher à partir d'un point $x_0 \in [a;b]$ par la tangente de f en x_0 et l'axe des abscisses et réitérer le processus. Cela revient à définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

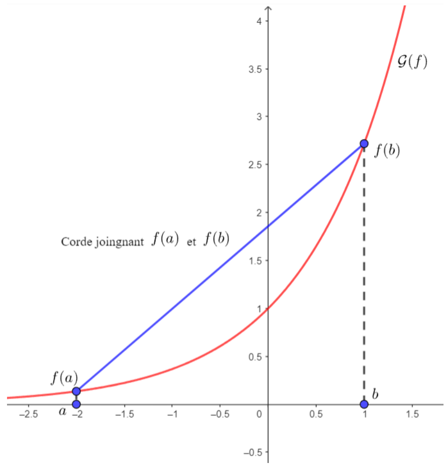
Théorème 62 : Méthode de Newton [Rouvière, p.152] :
Soit $f : [c;d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c;d]$ et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c;d]$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
$*$ f possède un unique zéro noté a et pour tout $x \in [c;d]$, il existe $z \in [a;x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$.
$*$ Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c;d]$, $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit stable par F et que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une convergence d'ordre 2 vers a dans I.
$*$ Si on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[c;d]$, alors l'intervalle $I = [a;d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec :

$$0 \leq x_{n-1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et } x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

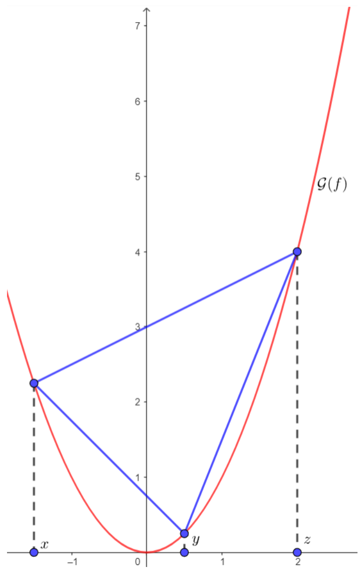
Remarque 63 :
Le premier résultat est un résultat local, tandis que dans le second résultat, on suppose f convexe pour avoir la convergence d'ordre 2.

IV Annexe

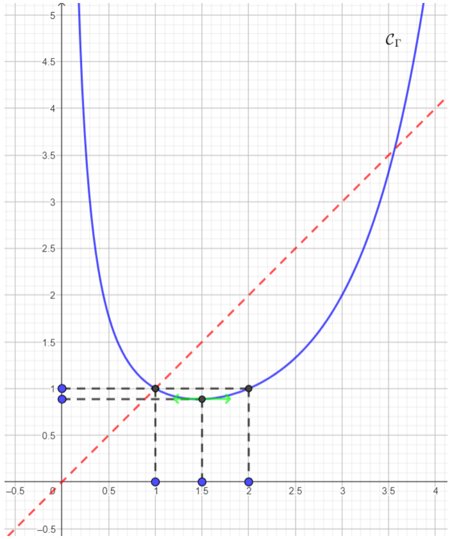
IV.1 Représentation graphique d'une fonction convexe



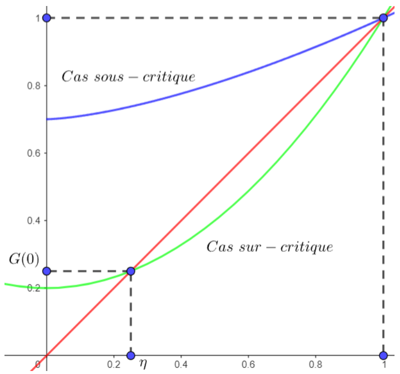
IV.2 Illustration de l'inégalité des pentes



IV.3 Allure de la fonction Γ



IV.4 Représentation graphique de G et de ses points fixes



Remarques sur la leçon

— On peut s'intéresser dans cette leçon au point de vue de l'optimisation et de l'analyse numérique.

Liste des développements possibles

— Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$.

— Processus de Galton-Watson.

— Méthode de Newton.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et Probabilités*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*.

— François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.