Leçon 224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Une certaine aisance dans la manipulation des relations de comparaison est attendue dans cette leçon. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1 ou du logarithme intégral au voisinage de $+\infty$, méthode de Laplace ou de la phase stationnaire notamment), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on peut étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros.
Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées.
Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, des exemples de méthodes d'accélération de convergence peuvent être présentées.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 224 intitulée : "Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.". Les développements asymptotiques et développements limités sont des outils apparaissant dans presque tous les domaines des mathématiques. Ils permettent en effet de comprendre le comportement typique d'une fonction ou d'une suite en un point ou en l'infini, en les comparant à des fonctions usuelles telles les puissances de x combinées avec des puissances de ln par exemple.
Dans une première partie on s'intéresse à la comparaison de suites et de fonctions en commençant par parler des relations de comparaison qui sont à la base de ce concept. Ainsi on introduit en premier lieu les notions de fonction dominée, négligeable et équivalente. Ces définitions s'adaptant parfaitement au cas des suites, on se concentre donc majoritairement dans la suite à l'étude de fonctions. On donne ensuite quelques exemples de comparaison avant de s'intéresser aux opérations possibles et nous s'en donnons que quelques une mais si nécessaire nous utiliserons d'autres relations non donnée ici. On termine ensuite ce point avec la formule de Stirling via les intégrales de Wallis qui donnent un équivalent en $+\infty$ de $n!$. Dans un deuxième point on s'intéresse à la notion de développement limité où l'idée est d'approcher une fonction en un point par un polynôme "qui lui ressemble le plus" et cette idée se traduit via le formule de Taylor-Young. On montre alors que sous réserve d'existence, le développement limité à l'ordre n est unique et on fait le lien avec la continuité et la dérivabilité. On donne ensuite quelques opérations sur les développements limités ainsi que quelques exemples dans chaque cas. On termine cette première partie avec la notion de développement asymptotique que l'on introduit via l'exemple 19 où l'on a pas un développement limité étant donné la présence d'un terme en $\frac{1}{x}$. Cette notion généralise cette de développement limité et permet de trouver des asymptotes à des fonctions en l'infini par exemple.
Dans une deuxième partie, on veut mettre en pratique ces développement limités et asymptotiques via l'étude de suites. On commence par le cas des séries numériques avec le théorème de comparaison série-intégrale ainsi que les relations de comparaison qui permettent d'obtenir un développement asymptotique de la série harmonique et permet d'avoir une idée de sa vitesse de divergence. On continue en introduisant les nombres et polynômes de Bernoulli ainsi que quelques unes de leurs propriétés ainsi que la formule d'Euler-Maclaurin qui est une formule particulièrement efficace et redoutable pour obtenir des développements asymptotiques. En effet, elle permet (sans trop de peine) de trouver un développement asymptotique de la série harmonique à la précision $\frac{1}{n^r}$ alors que celui à la précision $\frac{1}{n}$ était très laborieux à obtenir... Dans un deuxième point on s'intéresse à l'étude asymptotique de suites récurrentes via plusieurs exemples tels que les sinus ou arc tangentes itérés. Et enfin dans une dernière partie on s'intéresse à l'étude de séries semi-convergentes en montrant leur convergence via des équivalents.
Finalement, on termine cette leçon avec une dernière partie consacrée à des développements asymptotiques de fonctions particulières en commençant par le cas des fonctions définies par une intégrale. Le principal outil dans ce cas est alors l'intégration

des relations de comparaison qui permet de retrouver des résultats usuels comme on peut le voir en exemple 40. Enfin, on conclut avec le cas de fonctions définies par la somme d'une série avec une brève étude de la fonction ζ (régularité, limite en $+\infty$, développement asymptotique en 1^+ et développement en produit eulérien) ainsi qu'une application à la série des inverses des nombres premiers et la proposition 45 ainsi qu'un exemple.
On trouvera également en annexe une liste des développements limités usuels.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathcal{D}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, a un point adhérent à $\mathcal{D}$ et les fonctions considérées sont définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs réelles ou complexes.

I Comparaison de suites et de fonctions

I.1 Relations de comparaison

Dans toute cette sous-partie, on considère deux fonctions f et g définies sur $\mathcal{D}$.

Définition 1 : Fonction dom./négl./équiv. [Deschamps (1), p.692] :
On dit que :
* f est **dominée par** g **au voisinage de** a lorsqu'il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$, bornée au voisinage de a et telle que $f = g \times u$ au voisinage de a. On note alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
* f est **négligeable par** g **au voisinage de** a lorsqu'il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$, tendant vers 0 en a et telle que $f = g \times u$ au voisinage de a. On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$.
* f est **équivalente à** g **au voisinage de** a lorsqu'il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$, tendant vers 1 en a et telle que $f = g \times u$ au voisinage de a. On note alors $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarque 2 :
Ces définitions sont valables pour des suites numériques (on prendra le corps $\mathbb{R}$ et $a = +\infty$).

Exemple 3 : [Deschamps (1), p.693]
* On a $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} O\left(x^2\right)$. * On a $x^2 \underset{0}{=} o(\sin(x))$. * On a $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.

Proposition 4 : [Deschamps (1), p.695 + 701 + 702]
* o et O sont stables par somme mais pas $\sim$!
* o, O et $\sim$ sont stable par multiplication et passage à la puissance.

Remarque 5 : [Deschamps (1), p.694-706]
Il existe encore énormément d'autres résultats sur les comparaisons mais nous ne les donnerons pas ici par manque de place mais les utiliserons si nécessaire.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS (1)]

Proposition 6 : [Deschamps (1), p.651]

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.
* On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
* Pour tout $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
* La suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et de valeur $\frac{\pi}{2}$.
* Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
* On a l'équivalent $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Proposition 7 : Formule de Stirling [Deschamps (1), p.792]

On a l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

I.2 Développements limités

Dans toute cette sous-partie, on considère n un entier naturel.

Définition 8 : DL au voisinage de 0 [Deschamps (1), p.707] :

On considère une fonction f définie au voisinage de 0.
On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en 0** lorsqu'il existe des complexes $a_0, a_1, ..., a_n$ et une fonction ε définie sur $\mathcal{D}_f$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Exemple 9 : [Deschamps (1), p.707]

* La fonction $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3\ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + o\left(x^3\right)$.
* La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ possède un développement limité à tout ordre en 0.

Proposition 10 : [Deschamps (1), p.708]

Si une fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors il est unique.

Proposition 11 : [Deschamps (1), p.709 + 710]

* f est continue en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 0 en a.
* f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Remarque 12 : [Deschamps (1), p.710]

La proposition précédente ne se généralise pas pour $n > 1$.

Théorème 13 : Formule de Taylor-Young à l'ordre n [Deschamps (1), p.711] :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide et contenant 0.
La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + o\left(x^n\right)$$

Exemple 14 : [Deschamps (1), p.711 + 712]

On trouvera en annexe des développements limités usuels.

Proposition 15 : [Deschamps (1), p.713]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I d'intérieur non vide contenant 0 et possédant un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière la fonction $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
Si F est une primitive de f sur I, alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie régulière est $x \longmapsto F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$.

Exemple 16 : [Deschamps (1), p.713 + 714]

On trouvera en annexe les développements limités des fonctions, $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)$.

Proposition 17 : [Deschamps (1), p.719]

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et admettant chacune un développement limité à l'ordre n en 0.
* La fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n.
* La fonction fg admet un développement limité à l'ordre n.
* Si de plus g a une limite non nulle en 0, alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n.

Il est également possible de composer les développements limités :

Exemple 18 : [Deschamps (1), p.729]

* On a $e^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. * $\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$.

I.3 Développement asymptotique

Exemple 19 : [Deschamps (1), p.735]

On considère la $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
On a $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$, donc la courbe représentative de f se rapproche de la droite Δ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$ (cette droite est donc une asymptote à la courbe) et la courbe représentative de f est située (pour x assez grand) au-dessus de la droite Δ (car $\frac{3}{8x} > 0$).

Dans l'exemple précédent, la droite Δ est appelée **asymptote oblique en $+\infty$ de f** et la relation $f(x) = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ est appelée **développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$** (plus généralement, on appelle développement asymptotique tout développement faisant intervenir une gamme de fonctions plus large que les fonctions puissances entières).

Exemple 20 : [Deschamps (1), p.737]

On considère la fonction $f(x) = (ex)^x$.
Au voisinage de 0, un développement asymptotique de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + x\ln(x) + x + \frac{1}{2}x^2\ln(x)^2 + o\left(x^2\ln(x)^2\right)$$

Exemple 21 : [Deschamps (1), p.738]

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(1+x)^2}{\sin(x)^3}}$.
Au voisinage de 0, f ne possède pas de développement limité mais un développement asymptotique de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{7}{12}x\sqrt{x} + o\left(x\sqrt{x}\right)$$

Exemple 22 : [Deschamps (1), p.739]

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.
On a $I_n - 1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et on a même $I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

II Exemples de développements asymptotiques de suites

II.1 Séries numériques

Théorème 23 : [Deschamps (2), p.412]

Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0;+\infty[$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
La série $\sum_{n\geq n_0+1}\left(\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)$ converge.

Exemple 24 : [Deschamps (2), p.413]

La convergence de la série $\sum\left(\int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}\right)$ permet de montrer l'existence de la constante γ d'Euler.

Théorème 25 : Théorème de comp. série-int. [Deschamps (2), p.413] :

Soit f une fonction continue par morceaux positive et décroissante sur $[n_0;+\infty[$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
La série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 26 : [Deschamps (2), p.413]

On considère $\alpha > 0$ et la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\alpha}$.
La série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
* Pour $\alpha = 1$, on a $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.
* Pour $\alpha \in]0;1[$, on a $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

On a également le tableau suivant (où $\sum v_n$ est une série à termes positifs) :

	$u_n = o(v_n)$	$u_n = O(v_n)$	$u_n \sim v_n$
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \sum_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$	$R_n(u) = o(R_n(v))$	$R_n(u) = O(R_n(v))$	$R_n(u) \sim R_n(v)$
$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$	$S_n(u) = o(S_n(v))$	$S_n(u) = O(S_n(v))$	$S_n(u) \sim S_n(v)$

Exemple 27 : [Deschamps (2), p.415]

On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Définition 28 : Nombres de Bernoulli [Gourdon, p.319] :

La fonction $z \longmapsto \frac{z}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r > 0$.
On appelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **nombres de Bernoulli** telle que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\},\ \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}z^n$$

Définition 29 : Polynômes de Bernoulli [Gourdon, p.319] :
La fonction $z \longmapsto \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r>0$.
On appelle $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **polynômes de Bernoulli** telle que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\},\ \frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

Proposition 30 : [Gourdon, p.319]
On a les propriétés suivantes :
$*$ $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$. $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.
$*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0$. $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1}$.
$*$ $\forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1)$. $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n+1} = 0$.

Proposition 31 : [Gourdon, p.319]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k,\ b_n \in \mathbb{Q}$$

En particulier, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$ et $b_6 = \frac{1}{42}$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\widetilde{B_n} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 1-périodique, qui coïncide avec B_n sur $[0;1[$.

Proposition 32 : [Gourdon, p.319]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} z^k$ et $b_n \in \mathbb{Q}$.
En particulier, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$ et $b_6 = \frac{1}{42}$.

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Proposition 33 : Formule d'Euler-Maclaurin [Gourdon, p.321] :
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ $(m<n)$ et $f : [m;n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$.
On a la relation :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h}{h!} \left(f^{(h-1)}(n) - f^{(h-1)}(m) \right) + R_r$$

avec $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \widetilde{B_r}(t) f^{(r)}(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 34 : [Gourdon, p.321]
Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r} \frac{(-1)^{r-1} b_h}{h n^h} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

II.2 Étude asymptotique de suites récurrentes

Exemple 35 : [Gourdon, p.281]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}\ (\alpha > -1)$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $u_n \sim (n(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

Exemple 36 : [Deschamps (2), p.416]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.
On a alors lorsque n tend vers ∞ que $u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Exemple 37 : [Deschamps (2), p.417]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(u_n)$.
On a alors lorsque n tend vers ∞ que $u_n = \frac{\ell}{2^n} + \frac{\ell^3}{9}\frac{1}{2^{3n-2}} + o\left(\frac{1}{2^{3n}}\right)$.

II.3 Étude de séries semi-convergentes

Exemple 38 : [Deschamps (2), p.418]
On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + \cos(n)}$.
La série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Exemple 39 : [Deschamps (2), p.418]
On considère la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.
La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

III Exemple de développement asymptotiques de fonctions particulières

III.1 Fonctions définies par une intégrale

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $I = [a; b[$ est un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ et on considère $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux applications mesurables et intégrables sur I.

Lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on a le tableau :

	$g = o(h)$	$g = O(h)$	$g \sim h$
$\int_a^b h < +\infty$	$\int_x^b g = o\left(\int_x^b h\right)$	$\int_x^b g = O\left(\int_x^b h\right)$	$\int_x^b g \sim \int_x^b h$
$\int_a^b h = +\infty$	$\int_a^x g = o\left(\int_a^x h\right)$	$\int_a^x g = O\left(\int_a^x h\right)$	$\int_a^x g \sim \int_a^x h$

Exemple 40 : [Gourdon, p.164]
Au voisinage de $+\infty$, on a pour tout $\alpha > 0$:

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \text{ donc } \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = o\left(\int_1^x t^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right) = o(x^\alpha)$$

Remarque 41 : [Deschamps (2), p.700]
La positivité de φ n'est pas superflue ! En effet, si l'on pose $f(x) = |\sin(x)|$ et $\varphi(x) = \sin(x)$, alors $f \underset{+\infty}{=} O(\varphi)$, alors que la fonction $x \longmapsto \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ est bornée mais pas $x \longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

III.2 Fonctions définies par la somme d'une série

Exemple 42 : [Deschamps (2), p.525]
La fonction zêta $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1; +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$.

Proposition 43 : [Gourdon, p.302]
On a $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$ et $\zeta(s) \underset{1^+}{=} \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$.

Proposition 44 : [Gourdon, p.302]
Pour tout $s > 1$, on a $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}}$

Exemple 45 : [Gourdon, p.302]
La série $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Proposition 46 : [Gourdon, p.159]
Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et est non nulle.
Pour tout $t > 0$, la série $\sum f(nt)$ converge et lorsque t tend vers 0^+, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \sim \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 47 : [Gourdon, p.159]
On a l'équivalent : $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{c}{\sqrt{1-x}}$ (on peut montrer que $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

IV Annexe

IV.1 Développements limités usuels

$$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} -\frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o\left(x^n\right)$$

Remarques sur le plan

- Le développement asymptotique permet de trouver une asymptote à une fonction en un voisinage.
- Il faut s'entraîner pour être à l'aise avec toutes les méthodes... C'est une leçon avec des outils de niveau prépa mais qui peut être rapidement compliquée !

Liste des développements possibles

- Formule de Stirling.
- Formule d'Euler-Maclaurin.

Bibliographie

- Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.
- Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.