

LEÇON N° 266 : UTILISATION DE LA NOTION D'INDÉPENDANCE EN PROBABILITÉS.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I/ Notion d'indépendance.

A/ Événements indépendants. [GK]

Définition 1 : Probabilité conditionnelle.

Remarque 2 : C'est une mesure de probabilité.

Définition 3 : Événements indépendants deux à deux.

Exemple 4 : On lance deux pièces A : "La première pièce fait face", B : "La deuxième fait pile", C : "On a le même résultat sur les deux pièces" alors A , B et C sont indépendants deux à deux.

Définition 5 : Événements mutuellement indépendants.

Contre-exemple 6 : Dans l'exemple précédent les trois événements ne sont mutuellement indépendants.

Proposition 7 : Si $(A_i)_{i \in I}$ indépendants alors $(B_i)_{i \in I}$ où $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ sont indépendants.

Application 8 : $\varphi(n) = n \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

B/ Indépendance de tribus et de variables aléatoires. [GK] [CR]

Définition 9 : Indépendance de tribus.

Définition 10 : Mutuelle-indépendance de variables aléatoires.

Théorème 11 : Si (X_i) indépendantes et (f_i) mesurables alors $(f_i(X_i))$ sont indépendantes.

Exemple 12 : X et Y indépendantes alors X^2 et $\text{ch}(Y)$ sont indépendantes.

Contre-exemple 13 : X_1, X_2 les deux va donnant le résultat du lancer des deux pièces alors X_1, X_2 et $X_1 - X_2$ ne sont mutuellement indépendantes.

Proposition 14 : $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.

Définition 15 : Inverse généralisée d'une fonction de répartition.

Lemme 16 : Si (X_n) iid Bernoulli de paramètres $\frac{1}{2}$ alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_n}{2^n}$ suit une loi uniforme de $[0, 1]$.

Théorème 17 : Pour toute probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il existe une suite de va iid de loi μ .

II/ Premières propriétés autour de l'indépendance.

A/ Critères d'indépendances. [GK]

Théorème 18 : Si X et Y indépendantes alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Remarque 19 : Si les variables aléatoires sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées.

Contre-exemple 20 : Réciproque fautive avec X loi uniforme sur $[-1, 1]$ et $Y = X^2$, elles sont décorréées mais pas indépendantes.

Corollaire 21 : Si X et Y indépendantes alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Proposition 22 : Si $(X_1, \dots, X_n)$ admet une densité, $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes si et seulement si $f_X = f_{X_1} \dots f_{X_n}$. Si X et Y indépendantes à densité alors (X, Y) à densité.

B/ Sommes de variables aléatoires. [CR] [GK] [Q2]

Proposition 23 : Si indépendantes $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

Application 24 : Si $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, si X et Y indépendantes de loi respectives $\Gamma(r, \lambda)$ et $\Gamma(s, \lambda)$ alors $X + Y$ de loi $\Gamma(r + s, \lambda)$.

Proposition 25 : Si X et Y indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Application 26 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Développement 1

| **Application 27** : Indécomposabilité de la loi de Poisson.

| **Proposition 28** : Si $X_1, \dots, X_n$ et N indépendantes alors $G_{\sum_{k=1}^N X_k} = G_N \circ G_{X_1}$.

C/ Cas des vecteurs gaussiens. [GK]

| **Définition 29** : Vecteur gaussien et matrice de covariance.

| **Proposition 30** : Si $X_1, \dots, X_n$ toutes normales indépendantes alors $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

| **Théorème 31** : Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien alors $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance associée est diagonale.

| **Remarque 32** : Dans le cas des vecteurs gaussiens si les variables aléatoires sont décorrélées elles sont alors indépendantes.

III/ Théorèmes limites.

A/ Borel-Cantelli. [WA]

| **Proposition 33** : Lemmes de Borel-Cantelli.

| **Application 34** : La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ sont récurrentes : on calcule $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et comme les séries divergent dans les deux cas on a le résultat par Borel-Cantelli.

B/ Loi des grands nombres. [WA]

| **Théorème 35** : Loi faible des grands nombres.

| **Théorème 36** : Loi forte des grands nombres.

| **Application 37** : $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ est un estimateur fortement consistant.

C/ TCL. [WA]

Développement 2

| **Théorème 38** : Théorème de Paul-Lévy.

| **Corollaire 39** : Théorème central limite.

| **Application 40** : Dans la méthode de Monte-Carlo, on a un intervalle de confiance de l'intégrale en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Références :

- [GK] Garet-Kurtzmann De l'intégration aux probabilités p. 49-54, p. 56, p. 126-136
- [CR] Chabanol Ruch Probabilités et statistiques p. 26 et p. 41
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 117, p. 423, p. 438 et p. 533
- [Q²] Queffélec Queffélec Analyse complexe et applications p. 209, p. 425