

LEÇON N° 264 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ espace probabilisable.

I/ Généralités sur les variables aléatoires discrètes.

A/ Caractérisation d'une variable aléatoire discrète. [CR]

Définition 1 : Variable aléatoire discrète.

Proposition 2 : La loi d'une variable aléatoire discrète est caractérisée par $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in X(\Omega)}$.

Exemple 3 : La variable aléatoire donnant le score d'un dé est une variable aléatoire discrète car à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$.

B/ Loïs discrètes usuelles et interprétation. [CR]

Tableau contenant toutes les lois, notations et interprétations : Uniforme, Bernoulli, Binomiale, Poisson, Géométrique (unique loi discrète sans mémoire).

C/ Variables aléatoires discrètes indépendantes. [CR]

On prend ici $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires dans n espaces probabilisés.

Définition 4 : Variables indépendantes.

Proposition 5 : Variables indépendantes dans le cas discret.

Proposition 6 : Si $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et $g_1, \dots, g_n$ mesurables alors $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont indépendantes.

Proposition 7 : Calcul de la loi de la somme de variables aléatoires indépendantes discrètes.

Application 8 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ et si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

II/ Moments et fonctions génératrices.

A/ Moments d'ordre k . [CR]

Définition 9 : Espérance discrète.

Remarque 10 : Si B mesurable alors si $X = \mathbb{1}_B$ on a $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(B)$.

Proposition 11 : $\mathbb{E}$ est linéaire et positive.

Remarque 12 : $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Proposition 13 : Formule de transfert.

Définition 14 : Moment d'ordre k , espace L^k , variance et écart-type.

Remarque 15 : Interprétation de l'espérance et de la variance.

Proposition 16 : Inclusion des L^k (car ici espace de mesure finie) et donc des moments.

Proposition 17 : Propriétés de la variance.

Exemple 18 : Calcul des espérances et variances des lois usuelles.

B/ Fonctions génératrices. [CR] [WA]

Définition 19 : Fonction génératrice.

Proposition 20 : La fonction génératrice est de rayon de convergence au moins 1.

Exemple 21 : Fonction génératrice des lois usuelles.

Proposition 22 : Si X et Y indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Développement 1

Application 23 : Indécomposabilité de la loi de poisson.

Proposition 24 : Toutes les propriétés de la fonction génératrice.

Développement 2

| Application 25 : Processus de branchement de Galton-Watson.

| Proposition 26 : Récupération des moments.

III/ Vers les théorèmes limites.

A/ Borel-Cantelli. [WA]

| Définition 27 : Limite sup d'événements.

| Proposition 28 : Lemmes de Borel-Cantelli.

Application 29 : La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ sont récurrentes : on calcule $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et comme les séries divergent dans les deux cas on a le résultat par Borel-Cantelli.

B/ Convergence en loi et TCL. [WA]

| Définition 30 : Convergence en loi.

| Proposition 31 : Si les variables sont discrètes alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

Application 32 : Approximation binomiale-poisson : si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ où $np_n \rightarrow \lambda$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

| Théorème 33 : Théorème central limite.

Application 34 : Dans la méthode de Monte-Carlo, on a un intervalle de confiance de l'intégrale en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Références :

- [CR] Chabanol Ruch Probabilités et statistiques p. 21-70 et Appendice B
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 117, p.160, p. 195, p. 393, p. 397, p. 411, p. 423, p. 438, p. 533