

Léon 234: Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue - intégrables

Ouvrages: Briane-Pagès, Rudin (pour DEV 1), Taubel (pour l'analyse comp.), El Amrani
Fourier

I - Autour de l'intégrale de Lebesgue

- 1) Fonctions mesurables
- 2) Mesures: définition et propriétés
- 3) Définition de l'intégrale de Lebesgue

II - Théorèmes généraux

- 1) Lemme de Fatou et convergence dominée
- 2) Intégrales à paramètres
- 3) Théorèmes de Fubini

III - Espaces L^p

- 1) Définitions et premières propriétés
- 2) Théorèmes de densité dans $L^p(\mu)$

IV - Applications

- 1) Convolution: définition et premières propriétés
- 2) Approximation de l'unité
- 3) Transformée de Fourier

DEV 1: Théorème de Riesz-Fischer

DEV 2: Injectivité de la transformée de Fourier

Leçon 234: Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue intégrables

I - Autour de l'intégrale (BR)

1) Fonctions mesurables

DEF 1: Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable lorsque: $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Si X et Y sont métriques, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$ on parle de fonction borélienne.

EX 2: 1_A est mesurable si $A \in \mathcal{A}$.

EX 3: Toute fonction constante est mesurable, les fonctions continues aussi.

PROP 4: L'ensemble des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ muni des opérations $(+, \cdot, \times)$ sur les fonctions est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

PROP 5: Soit (f_n) suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ alors $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ sont mesurables.

PROP 6: La limite d'une suite de fonctions qui CR est mesurable.

2) Mesure: définitions et propriétés

DEF 7: On appelle mesure sur $(X, \mathcal{A})$ toute application $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_{n \geq 1}$ est tel que $\forall n, A_n \cap A_m = \emptyset$ $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Si $\mu(X) < \infty$, on dit que μ est finie.

EX 8: $\forall A \in \mathcal{P}(X), \mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } A \notin \mathcal{A} \end{cases}$ la mesure de Dirac
• $\forall A \in \mathcal{P}(X), \mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{si } A < \infty \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ la mesure de comptage notée δ_A

DEF 8: Un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ muni d'une mesure μ est appelé espace mesuré.

PROP 9: $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

• Si $\mu(A) < \infty, \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

• Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

3) Définition de l'intégrale de Lebesgue

DEF 10: Une fonction $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est étagée lorsqu'elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs: $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}, \quad \mathbb{I} \text{ fini}, A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$.

THM 11 (fondamental d'approximation): Soit $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$ mesurable. Il existe une suite (f_n) de fonctions étagées telle que pour tout $x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
→ Si $f \geq 0$, on peut choisir (f_n) croissante positive.
→ Si f est bornée, on peut choisir (f_n) CV vers f .

DEF 12: Soit $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(X)} \alpha 1_{A_\alpha}$ étagée positive sur $(X, \mathcal{A})$. On définit $\int_X f d\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(X)} \alpha \mu(A_\alpha) \in \mathbb{R}^+$

EX 13: $\int_X f d\delta_a = f(a)$ (f étagée). • $\int_X f d\mu = \sum \alpha \mu(A_\alpha)$.

PROP 12: $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \quad f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

DEF 15: Soit f mesurable positive de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit $\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu, \varphi \in \mathcal{E}, \varphi \leq f \right\}$.
 f est μ -intégrable lorsque $\int_X f d\mu < \infty$.

THM 16 (Beppo Levi): Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

PROP 17: Soit $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}), \int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

COR 18: $f \leq g, \mu \ll \nu \Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

PROP 19 (Fubini): Soit $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})^{\otimes 2}$. Alors $\forall A \geq 0, \mu(\{f \geq A\}) \leq \int_X f d\mu$.

DEF 20: $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est μ -intégrable lorsque $|f|$ est μ -intégrable. On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \text{ mesurable}, \int_X |f| d\mu < \infty\}$.

DEF 21: Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu), \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.

THM 22: $\mathcal{L}^1(\mu)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive, elle est donc croissante.

PROP 23: Soit f Riemann-intégrable sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Alors: $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ telle que $f = g$ p.p. et $\int_a^b f = \int_a^b g$.

REM 24: $[a, b]$ fermé borné est important.

EX 25: $x \mapsto \sin(x)$ est Riemann-intégrable sur $[0, \pi]$ et mesurable-Lébesgue-intégrable.
 EX 26: $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[0, 1]$ est Lébesgue-intégrable mais pas Riemann-intégrable.

II - Théorèmes généraux [BRI]

1) Somme de Fabou et convergence dominée

THM 27: (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives, alors: $\liminf \int f_n d\mu \leq \int \liminf f_n d\mu$.

EX 28: Si f est croissante sur $[0, 1]$, continue en 0 et $x \mapsto f(x)$ dérivable λ -p.p. Alors $\int_0^1 f(x) dx \leq f(1) - f(0)$.

THM 29: (Convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ mesurables telles que $f_n \rightarrow f$ μ -p.p. Il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $f_n \leq g$ μ -p.p. Alors $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

REM 30: On peut en déduire un théorème d'interversion série-intégrale.

2) Intégrales à paramètres (E, d) espace métrique

THM 31: (Continuité sous l'intégrale) Soit $f: E \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

- $\forall u \in E, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
- μ -p.p. $u \mapsto f(u, x)$ est continue sur E μ -p.p.
- $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que pour tout $u \in E, |f(u, x)| \leq g(x)$ μ -p.p.

Alors $F: u \mapsto \int f(u, x) d\mu(x)$ est définie et continue sur E .

EX 32: La transformée de Fourier est continue sur $\mathbb{R}$.

THM 33: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert non vide.

- $\forall u \in I, x \mapsto f(u, x) \in L^1(\mu)$.
- μ -p.p. $u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur I .
- μ -p.p. $\forall u \in I, \left| \frac{\partial}{\partial u} f(u, x) \right| \leq g(x)$ où $g \in L^1(\mu)$.

Alors $F: u \mapsto \int f(u, x) d\mu(x), F'(u) = \int \frac{\partial}{\partial u} f(u, x) d\mu(x)$.

EX 34: La fonction $\Gamma: x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est $\mathcal{C}^\infty$.

REM 35: On peut citer le théorème

THM 36: (Holomorphie sous l'intégrale) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert de $\mathbb{C}$ non vide.

- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et $f: X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que:
- $\forall z \in \Omega, z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe.
- $\forall z \in \Omega, \exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(t, z)| \leq g(t)$ μ -p.p.
- $\forall K$ compact de $\Omega, \exists g_K$ holomorphe, $\forall (t, z) \in X \times K, |f(t, z)| \leq g_K(t)$.

Alors $F: z \mapsto \int f(t, z) d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω .

EX 37: Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

3) Théorèmes de Fubini

THM 38: (Fubini-Tonelli) Soit $f: (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable $\mu \otimes \nu$ -finie sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$. Alors les fonctions $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int f(x, y) d\mu(x)$ sont resp. μ -et ν -mesurables.

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

THM 39: (Fubini-Lébesgue) On considère 2 nouveaux $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$, soit $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Alors:

- $y \mapsto \int f(x, y) d\mu(x) \in L^1(\nu)$ μ -p.p.
- $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$ μ -p.p.
- $y \mapsto \int f(x, y) d\mu(x) \in L^1(\nu)$ ν -p.p.
- $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$ μ -p.p.

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

EX 40: Soit $f: (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$.

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 f(x, y) dy dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y) dx dy = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

II - Espaces L^p [BRI]

1) Définitions et premières propriétés

DEF 41: Pour tout réel $p > 0$, on définit $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ mesurable} / \int |f|^p d\mu < \infty\}$.

PROP 42: Si $\mu(X) < \infty, 0 < p \leq q \Rightarrow L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.

DEF 43: $L^\infty(\mu) = \{f \text{ bornées } \mu\text{-p.p.} / \|f\|_\infty = \supess |f| < \infty\}$.

DEF 44: $L^p(\mu) \cong L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}, \nu)$ où ν est l'égalité μ -p.p. $= \inf \{ \int |f| d\mu / \int |f|^p d\mu = 1 \}$.

PROP 45 (Hölder et Minkowski) Soit $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in L^p \times L^q$.

$0 \leq \int fg d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

$\forall p \geq 1, \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

PROP 46: $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, \infty]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

THM 47: (Riesz-Fischer) Pour tout $p \in [1, \infty], (L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

THM 48: $L^2(\mu)$ est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int fg d\mu$.

2) Théorèmes de densité dans les $L^p_K(\mu)$

PROP 49: Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p_K(\mu)$.

THM 50: On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Alors:

- L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p_K(\lambda)$, $p \in [1, +\infty[$.
- L'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p_K(\lambda)$, $p \in [1, +\infty[$.

COR 51: On a $\|f - f_R\|_p \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ pour tout $f \in L^p_K(\lambda)$, $p \in [1, +\infty[$ où $f_R: x \mapsto f(x+h)$.

IV - Applications [DRI] [EL AMIF]

1) Convolution: définition et premières propriétés

PROP 52: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. On définit $f * g: x \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) d\lambda(y)$, alors $f * g$ est définie λ -pp., $f * g \in L^1$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

PROP 53: On peut aussi définir la convolution pour $f \in L^1(\lambda)$ et $g \in L^p(\lambda)$, dans ce cas, $f * g \in L^p(\lambda)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

PROP 54: De même, si $f \in L^p(\lambda)$, $g \in L^1(\lambda)$, $f * g$ est uniformément continue et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

REM 55: $f * g = g * f$.

THM 56: Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial}{\partial x_i} (f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$.

REM 57: On a le même résultat si $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

2) Approximation de l'unité [EL AMIF]

PROP 58: L'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution.

DEF 59: On appelle approximation de l'unité toute suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que $\forall j \geq 1, \varphi_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j = 1$ et $\forall \delta > 0, \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \delta)} \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

EX 60: • Laplace: $\varphi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{j}} e^{-j|x|^2}$; Cauchy: $\varphi_j(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+j^2 x^2}$.
• Gauss: $\varphi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{j}} e^{-\frac{x^2}{j}}$.

THM 61: Soit $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une approximation de l'unité.

- Si f est uniformément continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, $(f * \varphi_j)_{j \geq 1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$.
- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty[$, $f * \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$.

REM 62: Ainsi, une approximation de l'unité se comporte asymptotiquement comme une unité pour $*$.

PROP 63: La fonction $\varphi: x \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2}} d\lambda(y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ($\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$).

DEF 64: On appelle noyau régularisant une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ telle que $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon = 1$, $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

EX 65: $(\frac{1}{\varepsilon^d} \varphi(\frac{x}{\varepsilon}))_{\varepsilon > 0}$ est un noyau régularisant.

THM 66: $\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\begin{cases} 0 \leq X_\varepsilon \leq 1 \\ X_\varepsilon = 1 \text{ au } \mathbb{R}^d \setminus E_\varepsilon \\ X_\varepsilon = 0 \text{ au } E_\varepsilon \end{cases}$ $\forall E$ fermé de $\mathbb{R}^d$.

où $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d, \text{dist}(x, E) \leq \varepsilon\}$.

THM 67: K compact de $\mathbb{R}^d$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$. Il existe $X \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq X(x) \leq 1$, $X(x) = 1$ si $x \in K$ et $X(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

3) Transformée de Fourier [EL AMIF]

DEF 68: Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit $\hat{f}: \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \langle x, \xi \rangle} d\lambda(x)$. On note aussi $\mathcal{F}f$.

PROP 69: (Riemann-Lebesgue), $\hat{f}$ existe, est continue sur $\mathbb{R}^d$ et $\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$. DEF 2

PROP 70: $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

THM 71: (Echange). Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} f(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v) g(v) dv$.

THM 72: L'application $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est injective.